Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Licenciatura em Matemática

RENAN MARCELO DA COSTA DIAS

# Sobre os livros de Álgebra Linear do Cientista Paraense Guilherme de La Penha

Belém/PA
2019

Renan Marcelo da Costa Dias

# Sobre os livros de Álgebra Linear do Cientista Paraense Guilherme de La Penha

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, do Centro de Ciências Sociais e Educação, da Universidade do Estado do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Miguel Chaquiam

Belém/PA
2019

Renan Marcelo da Costa Dias

# Sobre os Livros de Álgebra Linear do Cientista Paraense Guilherme de La Penha

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, do Centro de Ciências e Educação, da Universidade do Estado do Pará.

Data de aprovação: ____/____/____

Banca Examinadora

_______________________________
Prof. Miguel Chaquiam – Orientador
Dr. em Educação Matemática
Universidade do Estado do Pará

_______________________________
Prof. Fábio José da Costa Alves
Dr. em Geofísica
Universidade do Estado do Pará

_______________________________
Prof.ª Rosineide de Sousa Jucá
Dra. em Educação Matemática
Universidade do Estado do Pará

*À minha amada avó Joana Maria da Costa Dias.*

## AGRADECIMENTOS

À Deus pela força e coragem, e a Nossa Senhora das Graças por me conceder a graça de estar concretizando mais uma etapa da minha vida.

Aos meus pais Marcelo Dias e Rosiani Amaral, pelos ensinamentos e valores a mim repassados, de modo que tenham sido fundamentais para esse momento da minha caminhada. Também aos meus irmãos, Rayane Dias e Ruan Dias, meus primeiros alunos, pelo apoio e compreensão nos momentos de frustação, e em especial à minha irmã por ser meu exemplo de persistência rumo aos nossos sonhos. Enfim, à todos meus familiares pelas orações e pensamentos positivos.

Ao meu Orientador Prof. Dr. Miguel Chaquiam, por ter aceitado a missão de me orientar e me acompanhar desde o primeiro ano de curso de graduação, com seus valiosos conselhos, ensinamentos e correções quando necessário.

À minha Grande Amiga e eterna orientadora, Prof.ª Dra. Rosineide de Sousa Jucá, por ter acreditado em mim desde o primeiro dia de aula, por ter me ajudado nos momentos difíceis, além de ser reflexo de excelente profissional, em todos os aspectos, e de ser humano maravilhoso.

Aos meus professores da Universidade do Estado do Pará (UEPA), que durante a graduação, foram excelentes espelhos de profissionais dedicados e compromissados por uma educação pública de qualidade.

Às amizades construídas durante todo o período de curso, em especial Larissa Paulo, Márcia Almeida, Rômulo Duarte, Jessireila Melo e Luiz Miranda, por me ajudar a suportar situações difíceis e compreender que no final tudo se resolve.

À todos que contribuíram direta e indiretamente para essa etapa fundamental da minha vida, meu muitíssimo obrigado.

**Renan Dias**

## RESUMO

Este trabalho teve por objetivo verificar quais representações constam nos livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha, em especial nos tópicos de (In)dependência linear, geradores, base e dimensão num espaço vetorial, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), visando sua importância no processo de ensino desses conteúdos. Para tal, dedicou-se a estudar a Teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Raymond Duval, que estuda o papel das representações semióticas na aprendizagem matemática, e como suporte das análises adotou-se a teoria da Análise do Conteúdo de Laurence Bardin, a qual nos possibilitou criar as seguintes categorias de análise: (i) Introdução do conteúdo; (ii) Definição do objeto matemático e (iii) Utilização de mais de uma representação do objeto matemático. Diante das análises realizadas, foi possível observar algumas características marcantes nos livros em questão, dentre as quais, a utilização de ideias numéricas ou conceitos suportes à definição dos tópicos em questão, no entanto sem o abandono do rigor matemático nas definições. Além disso, de modo geral, foram identificados pelos menos três representações nos livros analisados: representação em linguagem natural, representação algébrica e representação geométrica, nas quais são possíveis observar os destaques às especificidades dos objetos matemáticos supracitados, bem como a realização de conversões. Tais características, de acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, possibilitam uma maior compreensão do objeto matemático, uma vez que permite aos alunos o reconhecimento desse objeto em diferentes representações, e assim, a compreensão do objeto matemático em sua essência e completude.



**Palavras-chave:** Matemática; Álgebra Linear; Guilherme de La Penha; Teoria dos Registros de Representação Semiótica; Análise do Conteúdo.

## ABSTRACT

This work was to verify which representations are contained in the books of Linear Algebra of the scientist from Guilherme de La Penha, especially in the topics of (In) linear dependence, generators, base and dimension in a vector space, according to the Theory of Semiotic Representation Registers (TSRS), aiming at its importance in the teaching of these contents. For that, he devoted himself to studying the Theory of Registers of Semiotic Representation developed by Raymond Duval, who studies the role of semiotic representations in mathematical learning, and as support for the analysis was adopted the theory of Content Analysis of Laurence Bardin, the which enabled us to create the following categories of analysis: (i) Introduction of content; (ii) Definition of the mathematical object and (iii) Use of more than one representation of the mathematical object. In the light of the analyzes, it was possible to observe some remarkable characteristics in the books in question, among which, the use of numerical ideas or concepts supports the definition of the topics in question, however without abandoning the mathematical rigor in the definitions. In addition, in general, at least three representations were identified in the analyzed books: representation in natural language, algebraic representation and geometric representation, in which it is possible to observe the highlights to the specificities of the aforementioned mathematical objects, as well as the accomplishment of conversions. These characteristics, according to the Theory of Semiotic Representation Registers, allow a greater understanding of the mathematical object, since it allows students to recognize this object in different representations, and thus, the comprehension of the mathematical object in its essence and completeness.

**Keywords**: Mathematics; Linear Algebra; Guilherme de La Penha; Theory of Semiotic Representation Records; Content Analysis.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

# ANEXOS

## SUMÁRIO

# 1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos a Álgebra Linear tornou-se alvo de diversas pesquisas no campo da Educação Matemática, uma vez que ela está relacionada a aplicações internas à Matemática, como geometria analítica, equações diferenciais e estruturas algébricas, e ainda a aplicações externas como economia, informática e ciências da computação.

Para Celestino (2000), a importância dessa disciplina e das pesquisas realizadas repousa no fato de que ela se encontra subjacente a quase todos os domínios da Matemática, assim, aqueles que desejam trabalhar com a Matemática, seja como foco de pesquisa ou como ferramenta para outros estudos, devem ter o domínio de seus principais conceitos e um deles é a Álgebra Linear.

Além disso, a Álgebra Linear possibilita o desenvolvimento de habilidades relacionadas as demonstrações matemáticas, e ainda oferece ao professor subsídios para a compreensão da importância de certos temas abordados na educação básica como matrizes, sistemas de equações lineares, etc. (MACHADO & BIANCHINI, 2012 apud CARDOSO, 2014).

No entanto, mesmo diante da importância de seu estudo e pesquisa, a Álgebra Linear é uma das disciplinas em que os alunos encontram grandes dificuldades, em especial nos tópicos (in)dependência linear, geradores, base e dimensão num espaço vetorial, fato que colaborou para o aumento do número de pesquisas relacionadas ao processo de ensino da Álgebra Linear no Brasil. Tais dificuldades são apontadas nos estudos de Grande (2006); Souza (2016) e Cardoso (2014).

Segundo Grande (2006), embora os conceitos de Álgebra Linear sejam utilizados em outros objetos matemáticos como equações de um sistema linear, vetores de geometria, matrizes e funções polinomiais, e ainda sejam essenciais em aplicações internas a esta disciplina, é consensual entre as literaturas que os alunos deixam os cursos de Álgebra Linear com dificuldades nos conceitos de (in)dependência linear, geradores, base e dimensão num espaço vetorial.

Essas dificuldades são atribuídas em parte à sua natureza, uma vez que os alunos conseguem manipular os algoritmos sem entende-los, e à aspectos cognitivos como a exemplo a linguagem axiomática dessa disciplina que, embora se tenha ciência da importância do formalismo, distancia o aluno do objeto de estudo.

Além disso, Souza (2016) aponta que os alunos têm dificuldades em transitar entre diferentes representações, do algébrico para o geométrico por exemplo, o que mostra que esses alunos não possuem ‘flexibilidade cognitiva’ necessária para fazer essa transação.

Segundo Grande (2006), embora hoje se tenha uma infinidade de recursos tecnológicos que possibilitam a concretização das ideias relacionadas à Álgebra Linear, os livros continuam sendo o maior recurso didático utilizado pelos professores e por isso influem diretamente nas aulas, e transformam o professor em um mero transportador de informações.

De acordo com Cardoso (2014), os professores de matemática planejam suas aulas baseadas naquilo que o livro propõe e, por isso, podemos então considerar que a forma como os alunos concebem os conhecimentos matemáticos está fortemente ligada a forma como esses conhecimentos são tratados nos livros didáticos. Desse modo, as análises de livros didáticos possibilitam diversos olhares sobre o processo de ensino de Álgebra Linear e, portanto, são relevantes na busca da compreensão do processo de ensino dessa disciplina.

Nesse contexto, um dos livros de Álgebra Linear utilizados nos cursos superiores na década de 80 é de autoria do cientista brasileiro Guilherme de La Penha. Nascido em Belém no ano de 1942, La Penha foi um cientista paraense que permeou por diversas áreas do conhecimento científico e reconhecido por muitos diante de sua genialidade.

Guilherme de La Penha formou-se engenheiro mecânico pela Pontifícia Universidade Católico do Rio de Janeiro (PUC-RJ), obteve dois mestrados, um na PUC-RJ e outro em Cambridge (Inglaterra), e ainda doutorado na universidade de Houston (EUA). Durante sua carreira acadêmica e como gestor público produziu diversos artigos e livros, além de assumir vários cargos relacionados ao sistema educacional brasileiro. (CHAQUIAM, 2012).

Dentre sua produção, estão os livros de Álgebra Linear escritos entre os anos de 1974 e 1976 com base na sua experiência como coordenador e professor dessa disciplina, além de ter produzido, em épocas anteriores, materiais dessa natureza. De acordo com Chaquiam (2012), o motivo da produção desses livros foi o desejo de dar um tratamento conceitual moderno ao assunto, enfatizando-se a interação em Álgebra Linear das influências geométricas e algébricas, bem como dos métodos numéricos.

Esse comentário despertou-me curiosidade à primeira vista, dado que durante o período em que cursei a disciplina de Álgebra Linear no curso de Licenciatura em Matemática tive contato apenas com as representações algébricas, sem ter conhecimento de outras representações que não essas, além disso, durante esse período me deparei com diversos momentos de frustação, pois algumas ideias como (in)dependência linear, geradores, base e dimensão num espaço vetorial eram difíceis de ser compreendidas.

O comentário de La Penha somado a minha experiência ao cursar a referida disciplina, levaram-me a refletir se as minhas dificuldades, ao cursar a disciplina de Álgebra Linear, estariam relacionadas a limitação de representações ao qual eu tive contato. Nesse ínterim, percebi que deveria primeiramente compreender essas representações a fim de verificar sua aplicabilidade no ensino de Álgebra Linear, fato que poderia ser estudado nos livros de La Penha.

Nesse caminhar, precisei buscar um suporte teórico no intuito de realizar uma análise pertinente às representações nos livros de La Penha, e assim, adotou-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) desenvolvida por Raymond Duval, visto que estuda o papel das representações na aprendizagem matemática, e como suporte para a criação das categorias de análises adotou-se a Teoria da Análise do Conteúdo (AC) de Laurence Bardin.

Desse modo, surgiu assim a questão norteadora desse trabalho: *Quais representações de (in)dependência linear, geradores, base e dimensão num espaço vetorial constam nos livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica?*

Para responder à questão de pesquisa, alguns objetivos foram elencados, sejam eles:

- Objetivo Geral

Identificar as representações *de (in)dependência linear, geradores, base e dimensão num espaço vetorial constantes nos livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica*, visando sua importância no processo de ensino desses conteúdos.

- Objetivos Específicos

i. Realizar um levantamento acerca da vida de Guilherme de La Penha, bem como de sua produção acadêmica inerente ao ensino de Matemática, especialmente da Álgebra Linear
ii. Debruçar sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e a Teoria da Análise do Conteúdo de Bardin, a fim de serem norteadoras das análises dos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha
iii. Delimitar os livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha que seriam analisados
iv. Crias as categorias de análise dos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha com base na Teoria da Análise do Conteúdo de Bardin
v. Caracterizar a importância das representações identificadas no processo de ensino dos objetos matemáticos elencados.

Como metodologia de pesquisa, adotamos a do tipo bibliográfica-documental de Gil (2008), que é a pesquisa que se utiliza de material já elaborado constituído principalmente de livros e artigos científicos, que permite ao investigador uma visão ampla dos estudos já realizados sobre o tema, e ainda são utilizados documentos que ainda não tiveram um tratamento analítico ou que podem ser reelaborados de acordo com o objetivo da pesquisa, que neste trabalho são os livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha.

No que diz respeito aos procedimentos metodológicos, em um primeiro momento me debrucei sobre o estudo de Chaquiam (2012), no propósito de extrair informações acerca da vida e obras de Guilherme de La Penha, bem como dos estudos de Duval (1970; 1995) sobre a TRRS a fim de verificar as representações semióticas, e ainda sobre a Análise de Conteúdo de Bardin (2010), que por sua vez possibilitou a criação das categorias de análises dos livros, sejam elas:

(i) Introdução do conteúdo
(ii) Definição do objeto matemático
(iii) Utilização de mais de uma representação do objeto matemático.

A fim de possibilitar maior compreensão ao leitor acerca do andamento da pesquisa, o presente trabalho foi divido em seções, explicitadas a seguir.

Na seção 1, traçou-se algumas considerações a respeito das motivações que levaram à produção deste trabalho, bem como apresentamos a questão de pesquisa, e ainda o objetivo geral e os específicos relacionados a esta, no intuito de esclarecer ao leitor, de maneira sintética o andamento do trabalho.

Na seção 2, apresentou-se os traços biográficos de Guilherme de La Penha, enquanto professor e gestor, bem como sua produção científica, principalmente no que diz respeito aos livros de Álgebra Linear, na finalidade de elucidar os motivos que me levaram a estudá-lo.

Na seção 3, discutiu-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) desenvolvida por Raymond Duval e a Teoria da Análise do Conteúdo (AC) de Laurence Bardin, com o propósito de esclarecer as características que fizeram-me adotá-las como norteadoras das análises dos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha.

Na seção 4, foi realizada uma descrição dos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha, que serão analisados a luz da TRRS e da AC, com o objetivo de apresentar essas obras em sua completude.

Na seção 5, foram executadas as análises dos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha a luz da TRRS e da AC, a fim de responder a questão norteadora do trabalho.

Na seção 6, formalizou-se a resposta da questão norteadora do trabalho, bem como apresentou-se outras conclusões acerca das análises realizadas nos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha.

Saliento que durante o desenvolvimento desse trabalho, foram feitos três recortes que geraram artigos publicados em eventos científicos, sejam eles: *'Os livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha'* publicado no I Congresso Pan-Amazônico de Matemática (COPAM); '(In)dependência linear nos livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha: um estudo sobre a abordagem metodológica' publicado no XIII Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) e 'Base e Dimensão nos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha' submetido no XIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Tais artigos encontram-se em anexo no presente trabalho.

# 2. TRAÇOS BIOGRÁFICOS DE GUILHERME DE LA PENHA

Nesta seção apresento informações acerca da vida de Guilherme de La Penha, enquanto professor e gestor, bem como de sua produção científica, principalmente no que diz respeito aos livros de Álgebra Linear, no intuito de elucidar os motivos que me levaram a estudá-lo.

## 2.1. ACERCA DA DOCÊNCIA E GESTÃO

As informações referentes a Guilherme de La Penha foram obtidas na tese de doutoramento do professor Miguel Chaquiam, defendida em 2012, na Universidade Federal do Rio Grande do Norte, que teve por título “GUILHERME DE LA PENHA: Uma história de seu itinerário intelectual em três dimensões”, cujo foco central foi a historiografia brasileira da ciência, voltado especificamente para a vida e obra de um matemático-físico da contemporaneidade.

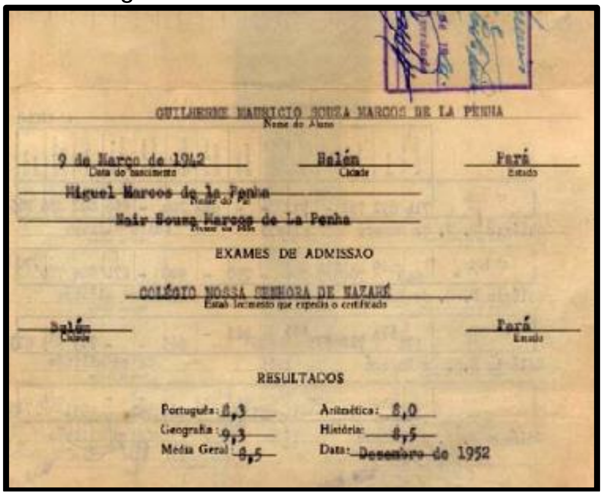
Segundo o autor, La Penha tinha um perfil que pode ser considerado como de um intelectual múltiplo e transdisciplinar, que defendia a possibilidade de se formar um cientista uno e múltiplo, de atitude não linear e que dialoga com todas outras áreas, inspirado nos autores com os quais ele se identificou ao longo da sua formação e atuação profissional, como Arquimedes, Leonhard Euler e Cliford Ambrose Truesdell.

Filho de Miguel Marcos de La Penha e Nair Souza Marcos de La Penha, Guilherme Maurício Souza Marcos de La Penha nasceu em Belém do Pará no dia 9 de março do ano de 1942. Casou-se cinco vezes, sendo sua primeira esposa Nilza Luna Marcos de La Penha com quem teve duas filhas Maria Carmen Luna Marcos de La Penha e Maria Alice Luna Marcos de La Penha.

Casou-se pela segunda vez com Regina Lúcia Guimarães e pela terceira vez com Denise Cavalcante Massena. Denise do Couto Ramos Cavalcante Marcos de La Penha foi sua quarta esposa, com quem teve sua terceira filha Tuscha de Couto Ramos Cavalcante Marcos de La Penha. O quinto matrimônio foi com Denise Hamú Marcos de La Penha, com quem La Penha teve sua última filha Júlia Hamú Marcos de La Penha.

Guilherme de La Penha cursou os ciclos primário e secundário, no extinto Instituto Suíço Brasileiro entre os anos de 1949 e 1952. Posteriormente prestou exame e foi admitido no Colégio Marista Nossa Senhora de Nazaré com média 8,5, e dessa forma cursou o 1º ciclo secundário e ginasial no período de 1953 a 1956, que corresponde atualmente aos estudos de 6º ao 9º ano do ensino fundamental. Nas figuras 1 e 2, é possível identificar respectivamente o resultado do exame de admissão e o certificado de conclusão do curso ginasial.

Figura 1 - Exame de Admissão



GUILHERME MAURICIO SOUZA MARCOS DE LA PENHA
Nome do Aluno

9 de Março de 1942 — Data do nascimento; Belém — Cidade; Pará — Estado

Miguel Marcos de la Penha — Nome do Pai

Mair Souza Marcos de La Penha — Nome da Mãe

EXAMES DE ADMISSÃO

COLÉGIO NOSSA SENHORA DE NAZARÉ
Estabelecimento que expediu o certificado

Belém — Cidade; Pará — Estado

RESULTADOS

| | |
|---|---|
| Português: 8,3 | Aritmética: 8,0 |
| Geografia: 9,3 | História: 8,5 |
| Média Geral: 8,5 | Data: Dezembro de 1952 |

Fonte: Acervo Guilherme de La Penha (2019)

Figura 2 - Certificado de conclusão do curso ginasial

REPÚBLICA DOS ESTADOS UNIDOS DO BRASIL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA

COLÉGIO N.ª S.ª DE NAZARÉ

N.º –

CERTIFICADO DE CONCLUSÃO DO CURSO Ginasial

Certificamos que Guilherme Maurício Souza Marcos de la Penha filho de Miguel Marcos de la Penha e de Mair Souza Marcos de la Penha natural de Belém - Pará nascido em nove de Março de 1942 tendo em vista os resultados das provas prestadas no ano letivo de 1956 na 4.ª série do Curso ginasial é considerado habilitado no PRIMEIRO ciclo Secundário, nos têrmos da Lei Orgânica do Ensino Secundário.

Belém, 5 de Novembro de 1960

Fonte: Acervo Guilherme de La Penha (2019)

Em 1959, La Penha concluiu o curso de Agrimensura pela Escola Técnica de Agrimensura do Pará. Nesse período de formação técnica em nível secundário, teve experiência de ensino como instrutor da Escola de Agrimensura do Pará e da Escola de Agronomia da Amazônia. Além disso, segundo depoimentos, consta que nesse período Guilherme de La Penha trocava correspondências com Elon Lages Lima sobre questões envolvendo cálculo e análise matemática.

No ano de 1960, La Penha prestou vestibular e foi aprovado ao Curso de Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Pará (UFPA), no entanto, neste mesmo ano, solicitou transferência para a Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC – Rio), vindo a concluí-lo em 1964. Durante a graduação, La Penha teve experiência como como Instrutor da Escola Politécnica da PUC – Rio e da Escola Graduada da PUC.

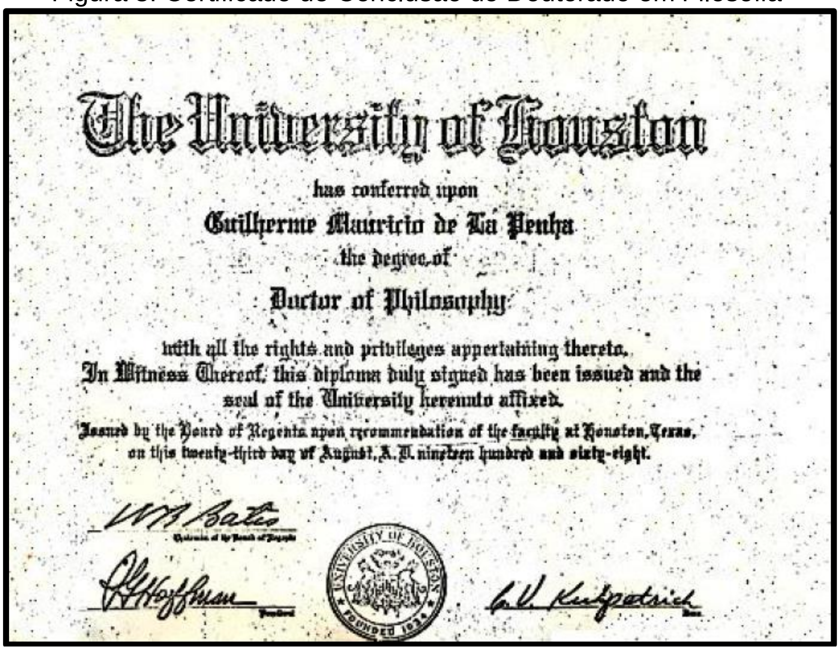
Durante sua graduação, especificamente entre os anos de 1961 e 1963, La Penha fez um curso de aperfeiçoamento em Matemática no Instituto de Matemática

Pura e Aplicada (IMPA) como bolsista de iniciação científica do então Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq). Além disso, La Penha estudou Matemática no IMPA a partir do ano de 1960, fato que possivelmente possibilitou o estudo de Mecânica dos Meios Contínuos com aprofundamento matemático.

Entre os anos de 1964 a 1965, Guilherme de La Penha fez mestrado em Engenharia Mecânica na Escola Pontifícia Universidade Católica (EPUC) na área de Mecânica Aplicada como bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), sendo o primeiro diploma de Mestre em Ciências outorgado por aquele curso de Engenharia Mecânica com a dissertação ‘Solução Exata para a Equação de Reynold na Teoria Hidrodinâmica de Berings sobre a largura finita’.

Concluiu outro mestrado, no ano de 1966, em Matemática aplicada e mecânica dos sólidos pelo Department of Applied Mathemáticas and Theoretical Physics da Universidade de Cambridge, na Inglaterra, como bolsista da CAPES e British Council (Consulado Britânico). Cursou doutorado na Universidade de Houston nos EUA como bolsista da CAPES e da Universidade de Houston no período de 1966 a 1968, na área de Matemática Aplicada e Mecânica dos Sólidos, no qual defendeu a tese ‘O problema final para pequena torção do cilindro oco circular elástico’, e assim, obteve o título de Doctor of Philosophy (Ph. D.), conforme observa-se na figura 3.

Figura 3: Certificado de Conclusão do Doutorado em Filosofia


The University of Houston
has conferred upon
Guilherme Mauricio de La Penha
the degree of
Doctor of Philosophy
with all the rights and privileges appertaining thereto.
In Witness Whereof, this diploma duly signed has been issued and the seal of the University hereunto affixed.
Issued by the Board of Regents upon recommendation of the faculty at Houston, Texas, on this twenty-third day of August, A.D. nineteen hundred and sixty-eight.

Fonte: Acervo Guilherme de La Penha (2019)

Ao concluir o referido doutoramento, La Penha realizou o pós-doutoramento em Matemática Aplicada na University Carnegie-Mellon entre os anos de 1968 e 1969, como bolsista da National Science Foudation. É importante ressaltar que durante o doutoramento e pós-doutoramento, Guilherme de La Penha realizou alguns cursos em Mecânica do Contínuo na Brows University e Virgínia Polytechnic, em 1967, e na Johns Hopkins University em 1969.

Em relação a atuação profissional de Guilherme de La Penha, este iniciou suas atividades docentes na Escola Politécnica da Universidade Católica do Rio de Janeiro em 1962/1963 como professor Assistente de matemática I-A. Em 1964 La Penha iniciou suas funções como professor auxiliar na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) até 1977, onde exerceu atividades de ensino, administração e pesquisa em setores como Escola Nacional de Engenharia, Instituto de Matemática e Coordenação dos Programas e Pesquisas em Engenharia (COPPE).

Entre os anos de 1965 e 1969, Guilherme de La Penha se afastou de suas atividades docente para cursar o doutoramento e pós-doutoramento, no entanto de 1967 a 1968 foi Teaching Fellow na Universidade de Houston e de 1968 a 1969 foi Lecturer da Universidade de Carnegie-Mellon. Em 1969, de volta ao Brasil, La Penha retornou às suas atividades na UFRJ como professor assistente na COPPE/UFRJ e em 1970 no Instituto de Matemática da UFRJ, sendo nesse último ano professor adjunto da UFRJ.

Em 1973, La Penha solicitou ascensão ao cargo de professor titular da UFRJ, tendo sua solicitação aprovada por unanimidade por sete professores americanos (Clifford Truesdell, Bernard Coleman, Morton S. Gurtin, Willian O. Williams, S. Bart Childs, Douglas Muster, D. G. Bourgin) e um brasileiro (Lindolpho de Carvalho Dias), os quais, em seus pareceres, destacaram aspectos como compromisso, seriedade, brilhantismo, dedicação e competência de La Penha, e ainda grandiosos elogios à respeito das contribuições desse cientista aos estudos da Mecânica do Contínuo e adjacências, principalmente no que tange a área da Matemática.

Além de professor, Guilherme de La Penha assumiu cargos administrativos, que exigiam grandes responsabilidades, dentro e fora da UFRJ.  É reconhecido por ser o responsável pela reestruturação do Instituto de matemática da UFRJ com o apoio de Luiz Coimbra, diretor da COPPE, uma vez que La Penha foi nomeado como diretor pró-tempore para o IM-UFRJ durante um ano, e em 1973 passou a ser diretor do IM-UFRJ por quatro anos.

Um fato interessante consiste na logomarca do IM-UFRJ, reconhecida pelos professores mais antigos como ‘urubu’, pois parece ser um desenho estilizado de um urubu, aves que vivem na ilha do fundão aonde funciona a COPPE-UFRJ. Esta logomarca foi criada por Guilherme de La Penha em 1971, enquanto diretor da IM-UFRJ, com base nos padrões que aparecem nos vasos egípcios. Na figura 4 podemos observar a logomarca do IM-UFRJ.

Figura 4: Logomarca do IM-UFRJ

Fonte: http://www.im.ufrj.br (2019)

Outro grande feito de Guilherme de La Penha, enquanto gestor da IM-UFRJ, foi a realização Simpósio Internacional Sobre Mecânica do Contínuo e Equações Diferenciais Parciais na UFRJ em agosto de 1977. De acordo com relatos, esse evento foi um marco nos estudos em engenharia, dado que este teve por objetivo familiarizar os matemáticos e outros cientistas da física e engenharia com as principais linhas de pesquisa moderna em assuntos inter-relacionados, fato que permitiu estimular discussões que possibilitaram a investigação de novos problemas ou retomar os antigos ainda em aberto.

Além disso, a realização desse simpósio contribuiu para o aumento do número de pesquisas em equações diferenciais parciais e mecânica do contínuo, em virtude do número crescente de dissertações e teses nessa área, e ainda o aumento do número de professores que realizaram curso de doutorado fora do Brasil.

Guilherme de La Penha também ocupou cargos junto a instituições federais e governamentais. Entre os anos de 1977 e 1979, esteve na Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP), e de 1979 a 1980, na Secretaria de Ensino Superior do Ministério de Educação e Cultura (SESu/MEC). Segundo relatos, no período em que esteve na FINEP, La Penha retornou a Belém, a convite do departamento de Física da UFPA, para organizar o primeiro curso de especialização promovido por esse departamento, e na oportunidade estreitou laços e ajudou financeiramente o grupo de pesquisadores do então Núcleo de Ciências Geofísicas e Geológicas (NCGG).

Além disso, na ocasião em que o departamento de Matemática instalou o curso de mestrado, La Penha doou a esse departamento a maior parte de sua biblioteca especializada em Matemática, e ainda continuou ajudando grupos de pesquisas emergentes do Brasil, em especial da UFPA.

Enquanto Secretário do SESu/MEC, Guilherme de La Penha foi conselheiro do Conselho Federal de Educação (CFE); Membro do Conselho Nacional de Pós-Graduação e Presidente do Grupo Técnico de Coordenação (GPC/CNPG); Membro do conselho plenário da Coordenação de Atividade de Processamento Eletrônico (CAPRE), como representante do Ministério da Educação e Cultura e Membro do Grupo Superior do Programa de Formação de Recursos Humanos para o Setor Nuclear (PRONUCLEAR).

No período de 1979 e 1980, La Penha proferiu diversas palestras a respeito dos processos educacionais e administrativos do ensino superior brasileiro, no qual defendia veemente a necessidade da desburocratização do ensino superior e da não dissociação de educação e cultura, bem como da adoção de uma postura administrativa na condução de problemas, no intuito de estimular a criatividade e incentivando o pluralismo metodológico, e ainda a valorização do magistério superior.

No período de 1980 a 1982, Guilherme de La Penha assumiu a Vice-presidência do CNPq enquanto Lynaldo Cavalcanti de Albuquerque foi presidente. Entretanto, La Penha se fez oposição durante a gestão de Lynaldo, juntamente com a comunidade científica, que por sua vez aguardava a indicação do Físico José Goldemberg, pois Lynaldo não tinha o perfil para exercer tal função, dado que era engenheiro, sem mestrado e doutorado, e não pertencia a Física, Química, Biologia ou Matemática.

Na qualidade de vice-presidente do CNPq, Guilherme de La Penha estava preocupado com o processo de ocupação acelerado da Amazônia, e então, ao perceber a necessidade de ações do governo no que concerne a contribuição da ciência e da tecnologia a esse processo, escreveu o artigo '*O papel da pesquisa para uma ocupação racional da Amazônia'*, no qual ressalta que o papel da ciência e da tecnologia na Amazônia é o de solucionar as contradições pela abertura de novos caminhos que possibilitem harmonizar: retorno econômico versus proteção ambiental; migração populacional versus proteção das populações primitivas; qualidade de vida versus desbravar áreas sem mínima estrutura.

Em 1982, La Penha publicou '*CNPq – Research Institutes*', em inglês, que teve por objetivo divulgar alguns institutos de pesquisas brasileiros no cenário internacional, tais como o Observatório Nacional, Instituto de Matemática Aplicada e Computacional, Museu Paraense Emílio Goeldi e Laboratório de Computação Científica.

Nesse mesmo ano, aconteceu a reestruturação do CNPq e o cargo de vice-presidente foi extinto, desse modo, La Penha pediu exoneração e manifestou o interesse de retornar a Belém e ajudar sua terra de origem. Sendo assim, em 1983, La Penha foi nomeado Assistente Especial do CNPq para a Amazônia e atuou no Museu Paraense Emílio Goeld (MPEG), no qual tomou a frente da restauração da biblioteca dessa instituição.

Durante o processo de restauração da biblioteca do MPEG e da Biblioteca Pública Gaspar Viana, Guilherme de La Penha também restaurou importantes obras datadas dos séculos XVIII e XIX, e nesse sentido, publicou artigos sobre o naturalista Charles Marie La Condamine e ensaios sobre o matemático suíço Leonhard Euler, no período em que se comemorou o bicentenário de sua morte.

Em 1984, como as condições políticas no governo estadual não eram favoráveis a La Penha, ele retornou à Washington, nos EUA, na qualidade de Consultor do Banco Interameriacano de Desenvolvimento (BID) e Assistente Especial do Departamento de Ciência e Tecnologia da Organização dos Estados Americanos (OEA), porém continuou a ajudar diversas instituições no Brasil, além de contribuir diretamente para a realização de um importante congresso na área do meio ambiente em Belém do Pará.

Ao retornar à Belém em 1985, Guilherme de La Penha assumiu a direção do MPEG e a Secretaria de Cultura do Estado do Pará até 1987, ano que deixou a Secretaria de Cultura e passou a atuar como assessor do então governado Hélio Mota Gueiros na reestruturação e implantação da Secretaria de Estado de Ciência, Tecnologia e Meio Ambiente do Pará – SECTAM.

Entre os anos de 1985 e 1991, durante a direção do MPEG, La Penha realizou importantes projetos como a Estação de Pesquisas Ferreira Penna, na Floresta de Caxiuanã, em Melgaço, investiu na expansão da infraestrutura física e das áreas de atuação do MPEG, iniciou a pós-graduação por meio de convênios, no qual garantiu pela primeira vez a formação de recursos humanos de alto nível na própria região amazônica. Dessa forma, Guilherme de La Penha transformou o museu numa instituição capaz de realizar pesquisas, promover a inovação científica, formar recursos humanos, preservar acervos e comunicar conhecimentos nas áreas de ciências naturais e humanas relacionadas à Amazônia.

De 1991 a 1994, no governo de Jader Fontenelle Barbalho, Guilherme de La Penha, enquanto Secretário de Cultura do Pará e Presidente da Fundação Cultural do Pará Tancredo Neves, informatizou esses dois órgãos, criou o Salão Paraense de Artes Plásticas, instalou o Museu do Estado do Pará e preparou o inventário de todos os bens artísticos e culturais de Belém. Em 1995, La Penha passou a atuar como Diretor de Programas Espaciais da Agência Espacial Brasileira até seu falecimento em fevereiro de 1996.

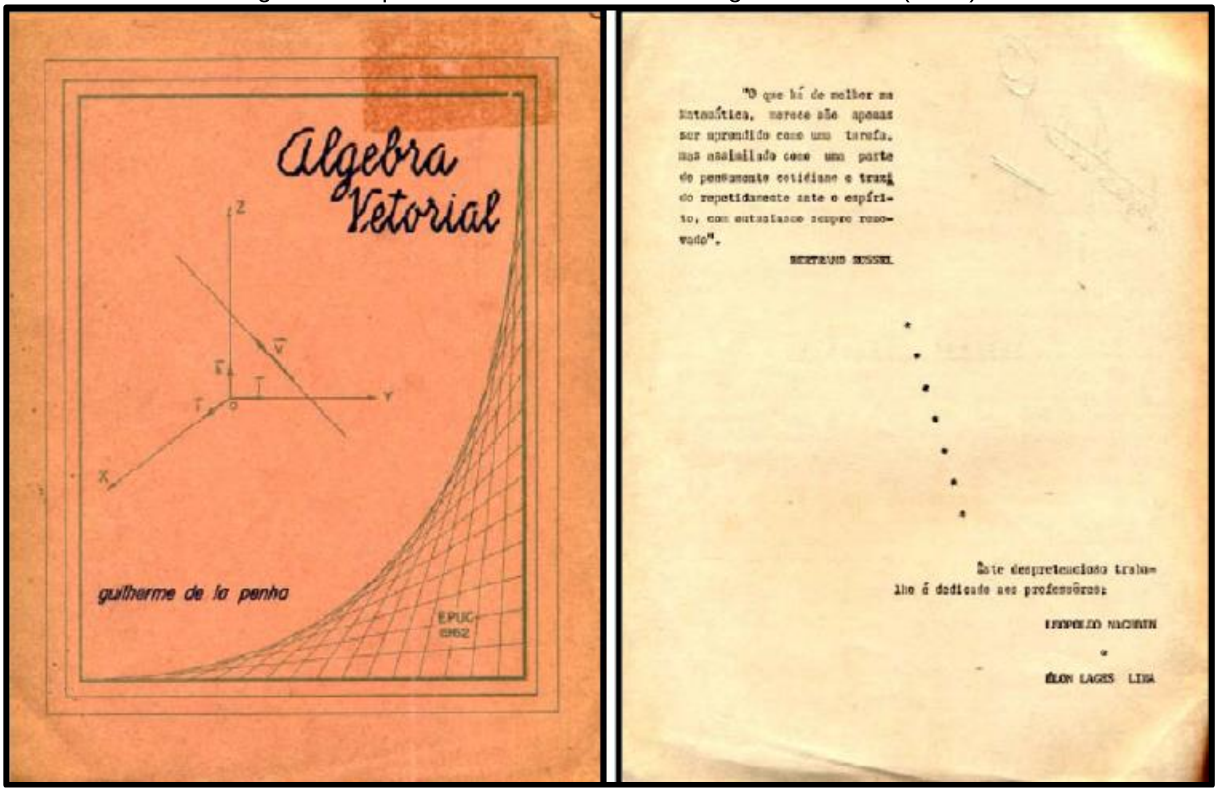
## 2.1. PRODUÇÃO CIENTÍFICA

A respeito da produção científica de Guilherme de La Penha, vários foram os estudos nas mais diversas áreas dentro e fora da Matemática. No estudo de Chaquiam (2012), há uma divisão dessas produções em três fases, sejam elas: Primitiva, Acadêmica Inicial, Romântica e Iluminista. Ressalto nesse trabalho as obras mais pertinentes ao objetivo deste estudo, em especial as produções em Álgebra Linear.

Em 1962, La Penha escreveu o trabalho ‘*Álgebra Vetorial*’ (figura 5), que trata de noções axiomáticas de espaço vetorial interligado à representação geométrica usual e suas aplicações em trigonometria, geometria analítica e física, e que tinha por objetivo preparar alunos para os exames de seleção das escolas de Engenharia e, em particular, da Escola de Engenharia - EPUC.

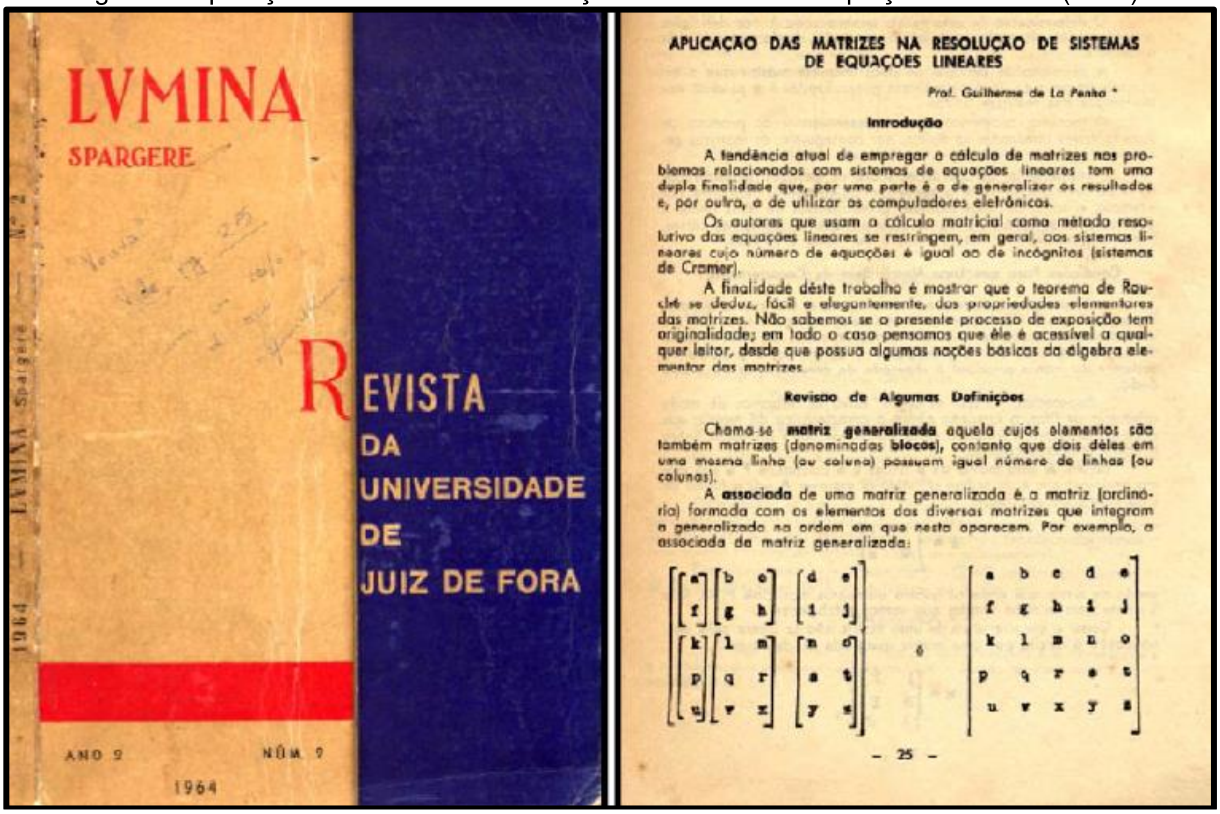
Segundo La Penha, esse texto influenciou o ensino em cursos vestibulares, tornando-se referencial de aprendizado para entrada na PUC-Rio e, ao mesmo tempo, desmistifica que o cálculo vetorial básico era apenas assunto para ser tratado a nível universitário. Essa obra é dividida em três capítulos: Generalidades, Operações Elementares e Exercícios.

Figura 5: Capa e folha de rosto do livro Álgebra Vetorial (1962)




Fonte: Acervo Guilherme de La Penha (2019)

Figura 6: 'Aplicação de Matrizes na Resolução de Sistemas de Equações Lineares' (1964)




Fonte: Acervo Guilherme de La Penha (2019)

Em 1964, La Penha publicou o artigo '*Aplicação de Matrizes na Resolução de Sistemas de Equações Lineares*' (figura 6), na revista LVMINA SPARGERE da Universidade de Juiz de Fora. Guilherme de La Penha, tinha dúvida quanto a originalidade do trabalho, uma vez que texto semelhante foi apresentado por Leônidas Hesenberg em 1961. É possível observar que a abordagem no supracitado texto vai além de uma simples manipulação algébrica, envolvem também os conhecimentos relativos a característica e decomposição de matrizes, bem como, resolução de sistemas lineares.

Ainda em 1964, Guilherme de La Penha, em parceria com Helio Siqueira Silveira, escreveu '*Álgebra Vetorial e Geometria Analítica no Espaço*', o qual era destinado aos alunos da Escola Politécnica da Universidade Católica e da Escola de Engenharia da Universidade de Juiz de Fora, que reuniu um conjunto de fórmulas e tabelas importantes para o desenvolvimento dos estudos de Álgebra Vetorial e Geometria Analítica.

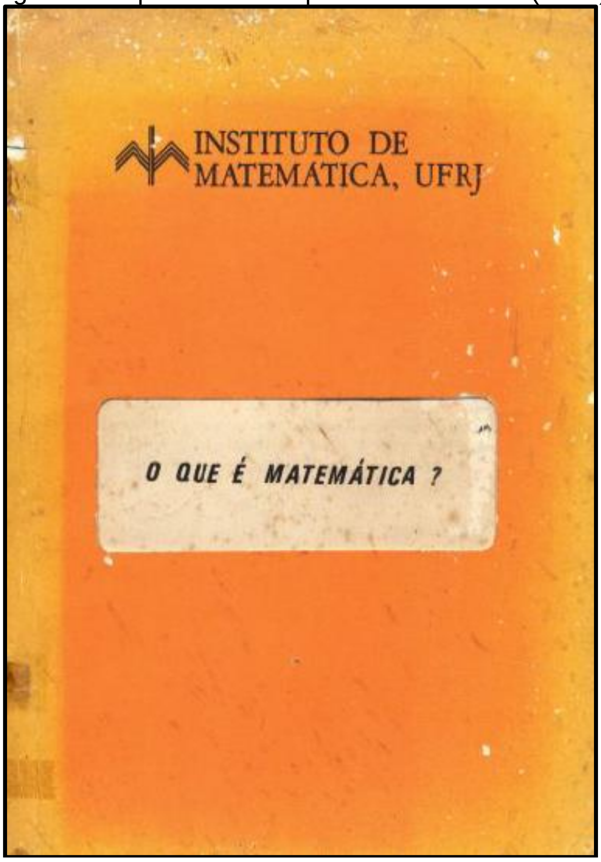
O trabalho manuscrito, é dividido em oito partes, sejam elas: Álgebra Vetorial e Sistemas e Transformações de Coordenadas; Correspondência entre Superfícies, Linhas e Equações, Direções; O plano e a Reta no Espaço e Problemas envolvendo Retas e Planos; Elementos imaginários; Coordenadas homogêneas e elementos no infinito; Geração de superfícies; Quádricas e tabelas.

Dando continuidade a parceria firmada, Guilherme de La Penha e Hélio Siqueira Mendes, publicaram em 1964 '*Geometria Analítica no Plano*', que reúne, após intensas e longas pesquisas em textos franceses, americanos e italianos, o básico essencial necessário para a formação de engenheiro de qualquer especialidade no que tange ao estudo das curvas no plano, com ênfase ao estudo das seções cônicas.

A última produção de Guilherme de La Penha no ano de 1964, que temos conhecimento, foi '*Problemas de Álgebra*', voltado aos alunos do atual ensino médio, no qual o autor apresenta uma série de atividades acerca de progressões aritméticas e geométricas, que eram utilizadas no Curso Propedêutico da Escola Politécnica da Universidade Católica.

Outra obra de Guilherme de La Penha, no que diz respeito a Matemática, foi 'O que é Matemática?' datada de 1970. Voltada aos iniciantes do curso de matemática, nela La Penha esclarece os conteúdos, objetivos e finalidades do curso, e ainda orienta de modo a permitir-lhes conhecer melhor o campo de atividade da Matemática. É possível observar a capa dessa obra na figura 7.

Figura 7: Capa do livro O que é Matemática? (1970)

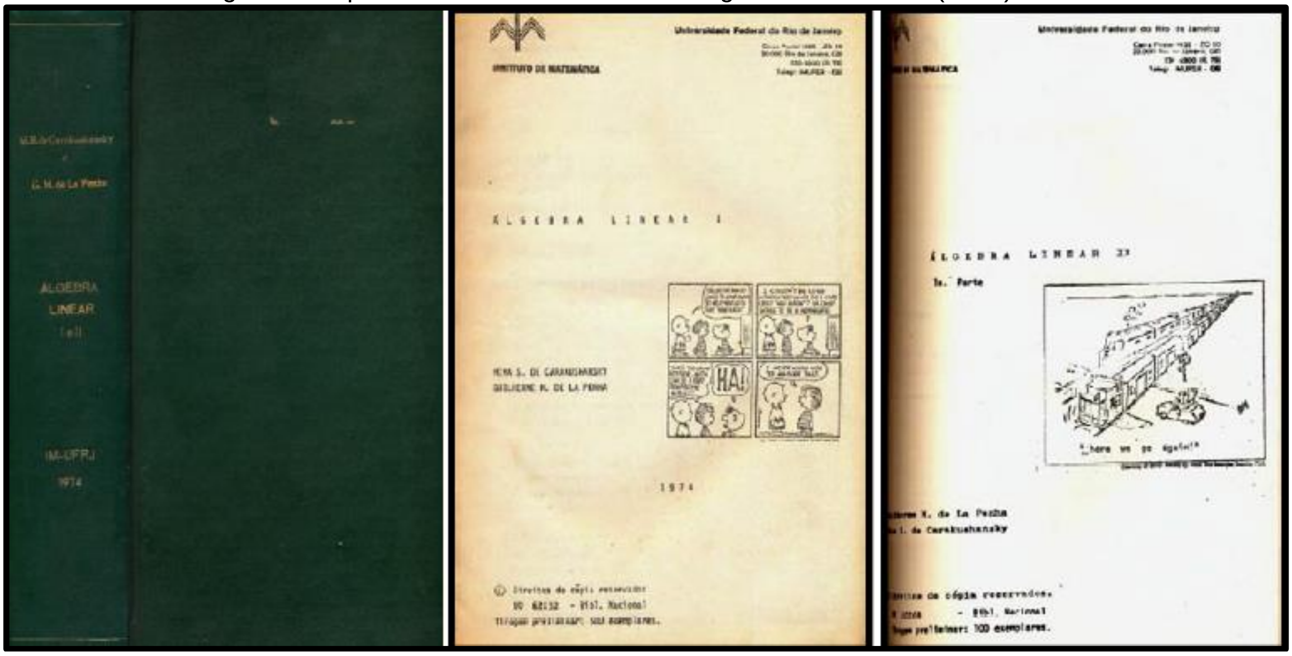



Fonte: Acervo Guilherme de La Penha (2019)

Nesta obra, La Penha apresenta pontos fundamentais a respeito da Matemática e suas aplicações nos campos da Física, Engenharia, Astronomia, Finanças e Seguros, Gerência e Operações, dividido em ‘Matemática Pura’ e ‘Matemática Aplicada’. Além disso, o autor disserta sobre o papel a ser desempenhado por licenciados ou bacharéis em Matemática em colégios, universidades, indústria, governo e na área computacional, e ainda, disponibiliza um modelo de currículo considerando que qualquer matemático a procura de emprego necessitará apresentar documentação que comprove seu preparo e experiência.

Em 1974, La Penha em colaboração com Mina Seinfeld de Carakushansky, professora e pesquisadora assistente do Programa de Pós-graduação do IM – UFRJ, iniciou com o livro *‘Álgebra Linear I e II’* (figura 8)*,* uma sequência de livros de Álgebra Linear no intuito de relacioná-la com outras ciências.

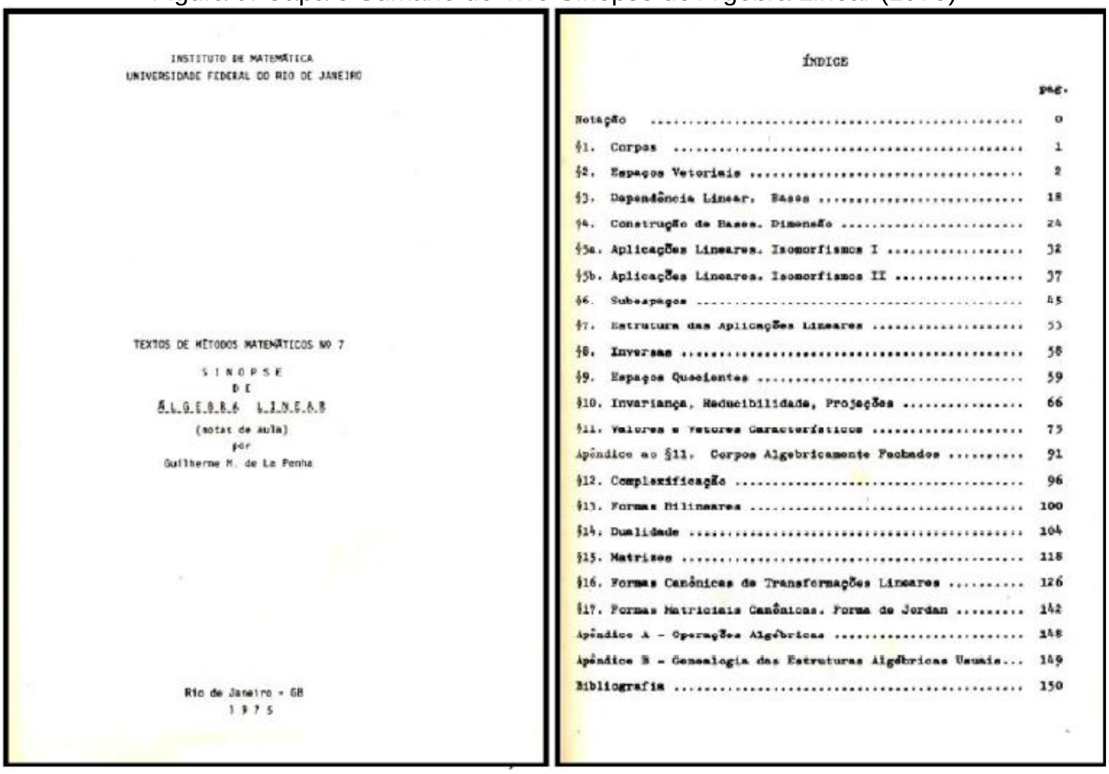
Figura 8: Capa e folha de rosto dos livros Álgebra Linear I e II (1974)




Fonte: Acervo Guilherme de La Penha (2019)

Posteriormente, em 1975, La Penha Lançou '*Sinopse de Álgebra Linear'* (figura 9), que, segundo ele, essas notas eram literalmente exposições de Álgebra Linear realizadas junto aos estudantes de mestrado na COPPE e no IM-UFRJ durante o período de 1970 a 1973. Esse livro pode ser identificado na figura 9.

Figura 9: Capa e Sumário do livro Sinopse de Álgebra Linear (1975)



INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

TEXTOS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS Nº 7

S I N O P S E
D E
Á L G E B R A   L I N E A R
(notas de aula)
por
Guilherme M. de La Penha

Rio de Janeiro - GB
1 9 7 5

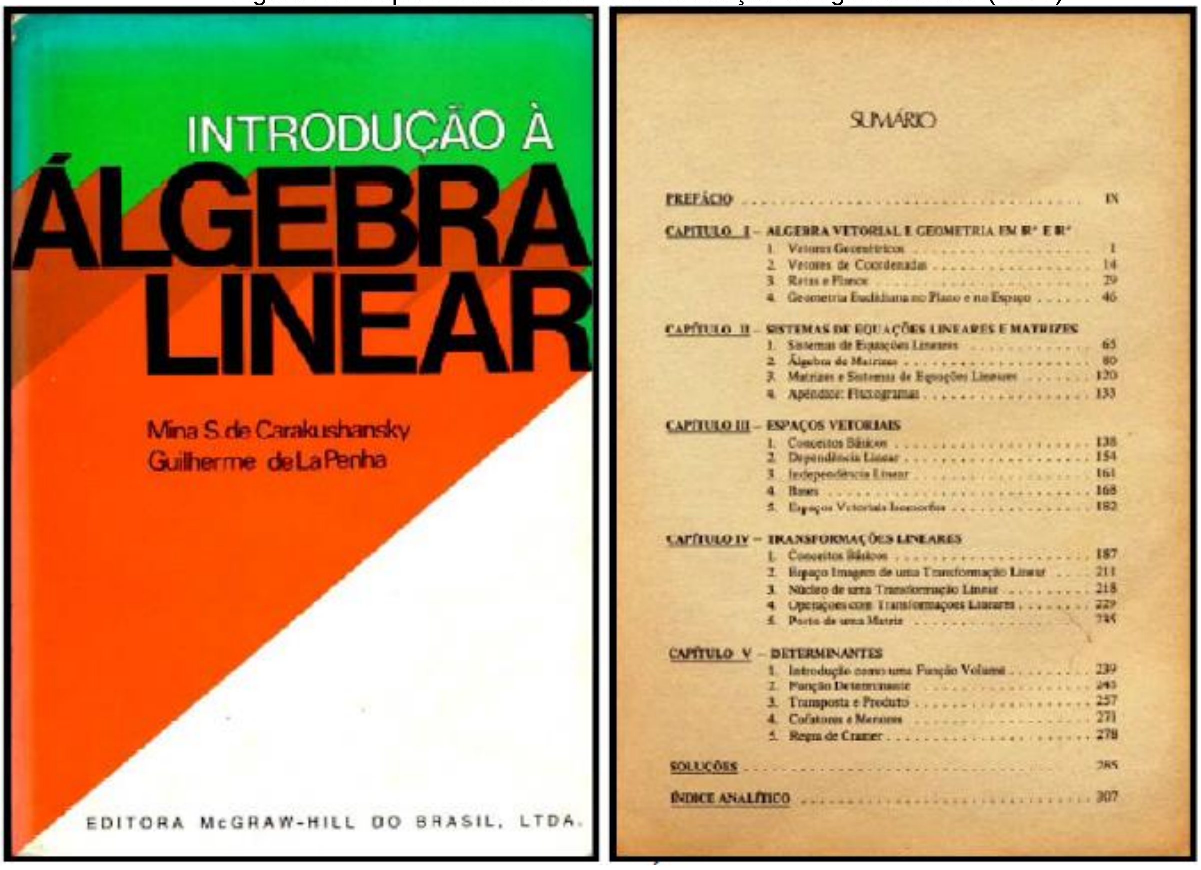
ÍNDICE



Fonte: Acervo Guilherme de La Penha (2019)

Em 1976, devido a experiências como professor e coordenador de álgebra I e II, além da autoria de diversos textos sobre álgebra Linear, La Penha lançou '*Introdução à Álgebra Linear*' (figura 10). É importante ressaltar que esse livro foi adotado em diversas universidades brasileiras, e ainda em algumas universidades da América Latina como *'Introducción al álgebra linear* ', traduzido por professores de Bogotá.

Figura 10: Capa e Sumário do livro Introdução a Álgebra Linear (1977)




SUMÁRIO

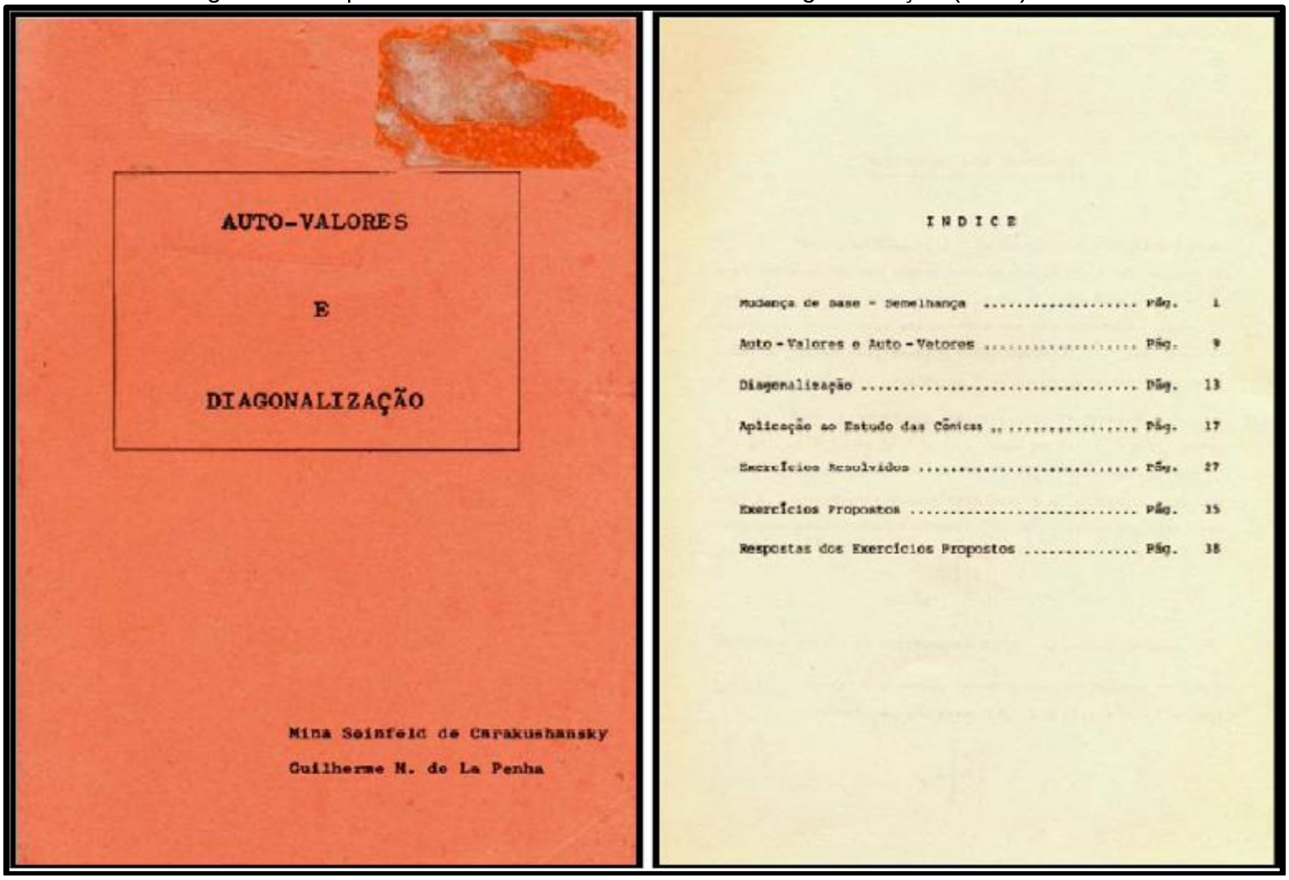


Fonte: Acervo Guilherme de La Penha (2019)

Em relação aos livros '*Álgebra Linear I a II*', '*Sinopse de Álgebra Linear'* e '*Introdução a Álgebra Linear*', abordo estes de maneira aprofundada na quarta seção deste trabalho, uma vez são meus objetos de pesquisa, no intuito de responder à questão norteadora desse trabalho.

Ainda no ano de 1976, La Penha e Mina Carakushansky lançaram *'Autovalores e Diagonalização*', que segundo os autores complementa o livro '*Introdução a Álgebra Linear*' e iniciam aqueles que desejam seguir pela teoria dos autovalores. Tais notas iniciam com a mudança de base e semelhança, seguido do estudo detalhado de autovetores e autovalores, diagonalização e aplicação às cônicas; o diferencial desse texto é a presença significativa de exercícios resolvidos. Na figura 11, é possível identificar a capa e o índice da obra.

Figura 11: Capa e Índice do livro Auto-Valores e Diagonalização (1976)



AUTO-VALORES

E

DIAGONALIZAÇÃO

Mina Seinfeld de Carakushansky

Guilherme M. de La Penha

INDICE

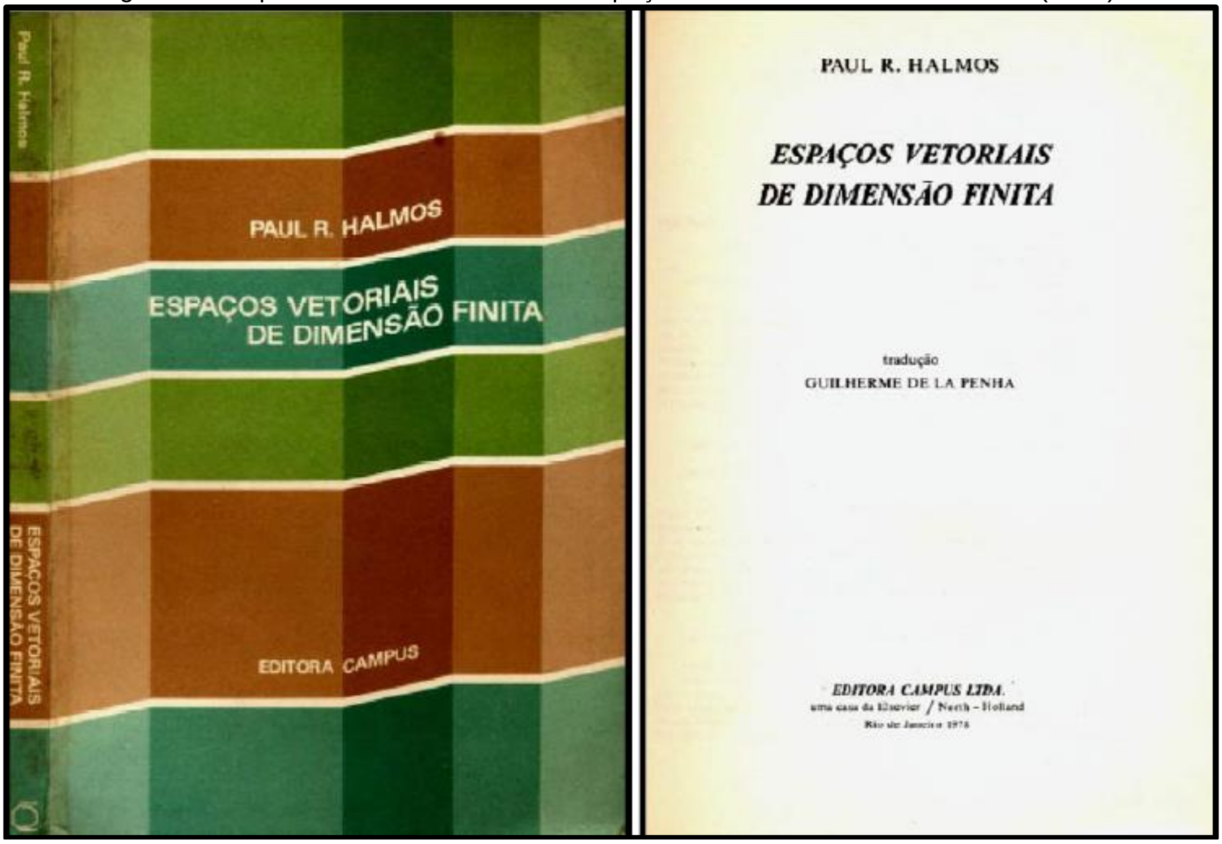


Fonte: Acervo Guilherme de La Penha (2019)

Em 1978, Guilherme de La Penha traduziu do original a obra '*Espaços Vetoriais de Dimensão Finita'*, o qual afirmava ser uma das obras fundamentais nesse assunto, e escreveu com o propósito de tornar acessível a um grande público alvo. Segundo La Penha, a intensa correspondência com o autor, nem sempre agradável, visava manter o espírito do livro, entretanto, os erros constantes na tradução não são de sua autoria e, sim, do revisor de língua portuguesa que resolveu "entender de matemática" e pluralizar singulares matemáticos ou distorcer conceitos.

Esta obra trata de transformações lineares em espaços de dimensão finita pelos métodos de teorias mais gerais, ao enfatizar as ideias geométricas e aplicações comuns em diversas partes da Matemática. Na figura 12, é possível identificar a referida obra.

Figura 12: Capa e folha de rosto do livro Espaços Vetoriais de Dimensão Finita (1978)




Fonte: Acervo Guilherme de La Penha (2019)

Guilherme de La Penha, embora tivesse formação na área de Engenharia Mecânica, contribuiu significativamente à área de Matemática, seja por meio de atividades enquanto docente e gestor, seja por meio de suas produções científicas. Em relação a essas produções, no que diz respeito aos compêndios de Álgebra Linear escritos entre os anos de 1974 e 1976, La Penha ressaltou em seu último livro a motivação dessa produção:

> A motivação principal foi o desejo de dar um tratamento conceitual moderno ao assunto, enfatizando-se a interação em Álgebra Linear das influências geométricas e algébricas e, concomitantemente, dando igual atenção a uma abordagem que visa as aplicações e os métodos de cálculo, responsáveis por uma grande parte do interesse e da importância do assunto (LA PENHA, 1976 *apud* CHAQUIAM, 2012, 157).

O comentário de La Penha me levou a reflexão acerca dessas interações algébricas e geométricas, bem como dos métodos numéricos, que ele ressaltou na produção desses livros, uma vez que, ao cursar a disciplina de Álgebra Linear na graduação tive contato apenas com as representações algébricas dos conceitos de Álgebra Linear e não tive conhecimento de outas representações. Desse modo, verificar o papel dessas representações nos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha se mostrou uma questão pertinente àqueles que desejam enveredar nessa área da Matemática e ter conhecimento dessas interrelações.

Após o delineamento da questão norteadora das análises dos livros, foi necessário adotar uma teoria que pudesse dar suporte às análises dos livros, nesse sentido optou-se pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), do francês Raymond Duval, devido abordar o papel das representações na aprendizagem matemática. Complementarmente tomou-se como suporte a Teoria do Conteúdo de Bardin para geração das categorias de análise dos dados agrupados.

Na seção seguinte explicitamos essas teorias a fim mostrar de maneira aprofundada os conceitos utilizados nas análises dos livros com o propósito de responder à questão norteadora apresentada anteriormente.

# 3. APORTE TEÓRICO

Nesta seção, apresento os conceitos base da Teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Raymond Duval e da Teoria da Análise do Conteúdo de Laurence Bardin, com o objetivo de utilizá-las nas análises dos livros de Álgebra Linear do Cientista Paraense Guilherme de La Penha, e desse modo, responder à questão de pesquisa deste trabalho.

## 3.1. TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

O contato com determinado objeto de estudo faz-se necessário a todo aquele que deseja conhecer melhor este objeto, ao passo que possibilita a compreensão de características, comportamentos e especificidades deste. Na biologia, por exemplo, é possível visualizar os objetos de estudos, tais como plantas, tecidos ou seres vivos, através de certos aparelhos como microscópios, assim como na química, física e astronomia.

No entanto, a Matemática difere-se das outras ciências devido a impossibilidade do contato, por meio dos nossos sentidos, com os objetos de estudo, uma vez que estes não estão presente no mundo real e o pouco contato que temos são com cópias imperfeitas de coisas que não existem como pontos matemáticos, números, figuras, retas e igualdade (D'AMORE ET AL, 2015).

Desse modo, no que se refere aos objetos matemáticos, é necessário utilizarmos um sistema de registros, símbolos e sinais para representa-los, no intuito de torna-los acessíveis aos alunos, a fim de que eles compreendam as características e conceitos de cada objeto matemático, embora não tenhamos em mãos o próprio objeto. Assim, as representações têm um importante papel no processo de ensino da Matemática.

Neste sentido, o filósofo e psicólogo francês Raymond Duval, a partir dos estudos sobre semiótica de Charles Sanders, Peirce e Ferdinand de Saussure, desenvolveu entre os anos de 1970 e 1995 a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que estuda a influência das representações semióticas dos objetos matemáticos sobre a aprendizagem de Matemática.

Duval (1993, p. 39 apud GRANDE, 2006, p. 63) define representações semióticas como sendo ‘Produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento. Além disso, segundo o autor, o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio de suas representações e não há conhecimento matemático que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação.

Em álgebra linear, por exemplo, podemos representar uma base de um espaço vetorial em diferentes registros semióticos como simbólico, figural ou numérico, e ainda dentro de cada registro semiótico há diversas representações semióticas desse mesmo objeto matemático, porém, em nenhuma dessas representações estão sendo tratadas verdadeiramente as bases de um espaço vetorial.

As representações, portanto, não significam o objeto matemático em si, mas nos fornece informações valiosas a respeito deste, e nesse ínterim repousa cognitivamente a importância das representações na aprendizagem matemática (GRANDE, 2006). A título de exemplo, podemos pensar no objeto matemático ‘vetores linearmente independente no $R^2$’, o qual podemos representar em mais de um registro semiótico, e ainda, em mais de uma representação semiótica.

$$\alpha_1 (x_1,y_1) + \alpha_2 (x_2, y_2) = 0, \text{ com } \alpha_i \in R, \leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

**Objeto matemático:** Vetores Linearmente Independente no $R^2$

**Registro Semiótico:** Simbólico

**Representação Semiótica:** Algébrica

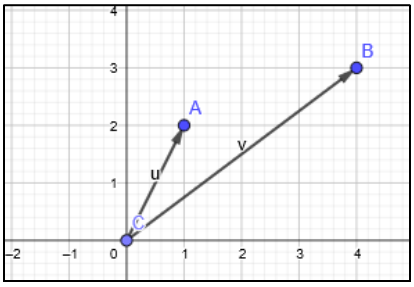
É possível identificar que os vetores linearmente independentes no $R^2$ foram representados dentro do registro simbólico, pela representação algébrica, porém, poderíamos representar esse mesmo objeto em outro registro.

**Objeto matemático**

Vetores Linearmente Independente no $R^2$

**Registro Semiótico:** Figural

**Representação Semiótica:** Geométrica



Sobre a diversidade de representações e sua relação com o ensino-aprendizagem de matemática, Duval afirma:

> Não podemos pensar que com uma única representação semiótica seja possível representar todas as componentes conceituais de um determinado objeto matemático. Ao contrário, sabe-se hoje, que cada representação semiótica veicula somente alguns dos aspectos conceituais que são componentes do objeto considerado, no sentido de que um objeto matemático possui várias componentes conceituais ligadas, mescladas, umas com as outras (...) Por isso, uma pluralidade de representações favorece a construção cognitiva do objeto representado, uma vez que cada uma contribuiu de maneira específica com alguns aspectos do objeto (D'MORE ET AL, 2015).

Sendo assim, cada vez que o aluno conhece uma nova representação semiótica de um determinado objeto matemático, ele conhece novas características desse objeto matemático, dessa forma, quanto maior o número de representações semióticas do objeto matemático o aluno possuir, maior é o seu conhecimento sobre esse objeto matemático.

De acordo com Duval (2011 apud MENDONÇA, 2017), o conhecimento começa quando não adotamos mais a representação do objeto no lugar do próprio objeto, e uma das formas para não confundir o objeto matemático de sua representação é dispor de uma segunda representação cujo conteúdo seja diferente da primeira. Nesse contexto, tem-se a necessidade da transição do aluno de um registro semiótico a outro ou ainda no mesmo registro, e para que essa transição ocorra é necessário ter claro o conceito de *transformação*.

A transformação de registros de representação, segundo Duval, desemprenha papel fundamental na aprendizagem matemática, visto que não podemos falar sobre representação sem destacar as relações entre os sistemas semióticos que produzem essas representações, e para estudar essas relações devemos analisar as transformações de registros, que por sua vez é dividida em *tratamento* e *conversão* (GRANDE, 2006).

Duval define *tratamento* como sendo transformações de representações dentro do mesmo registro semiótico e estas constituem transformações estritamente internas ao registro, sendo muitos destes específicos de cada registro. A estratégia pedagógica da utilização do *tratamento*, consiste na busca pelo professor de uma representação adequado à compreensão dos seus alunos (GRANDE, 2006).

Um exemplo de *tratamento* dentro da Álgebra Linear pode ser observado ao resolvermos um sistema linear por escalonamento através de operações elementares entre linhas.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y-z=2 \\ x+y+2z=9 \end{cases} \text{L1} - \text{L2} \sim \begin{cases} x+y+z=6 \\ 0x-y+2z=4 \\ x+y+2z=9 \end{cases} \text{L1} - \text{L3} \sim \begin{cases} x+y+z=6 \\ 0x-y+2z=4 \\ 0x+0y-z=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{matrix}$$

Ao substituir a segunda linha pela diferença entre a primeira linha e a segunda, obtemos o segundo sistema, posteriormente quando substituímos a terceira linha pela diferença entre a primeira linha e a terceira, obtemos o terceiro sistema equivalente, e assim, obtemos os valores de x, y e z respectivamente. É possível observar que através das operações elementares entre linhas do sistema linear obtivemos sistemas equivalentes, ou seja, mais de uma representação dentro do mesmo registro semiótico, o que caracteriza um *tratamento*.

Pinheiro (2015), aponta a posição do *tratamento* na aprendizagem matemática:

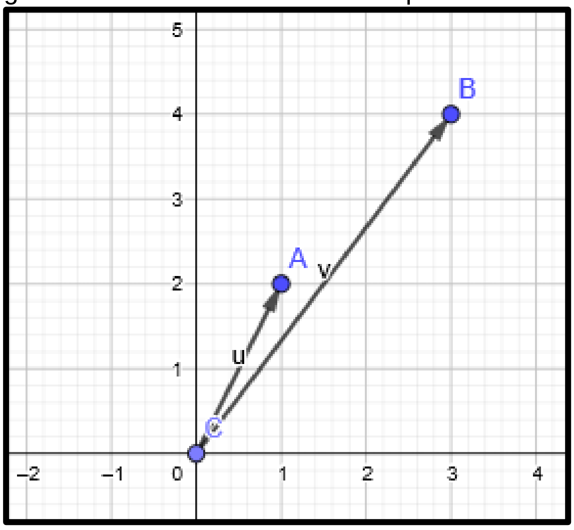
> Nas aulas de matemática é possível perceber que existe uma valorização excessiva do tratamento dos conceitos matemáticos, os alunos são levados a um treinamento exaustivo das técnicas operacionais de todos os objetos matemáticos que lhes são dados a conhecimento, de um ponto de vista matemático este treinamento é válido para operar com destreza e habilidade esses conhecimentos. No entanto, de um ponto de vista cognitivo, entendemos que essa valorização seja a causa de tanta confusão na distinção dos objetos matemáticos e suas representações (PINHEIRO, 2015, p. 36-37).

Em relação a *conversão*, Duval a define como a transformação de representação de um registro semiótico a outro registro, no qual altera-se a forma de apresentar o conteúdo, conservando-se a referência ao mesmo objeto (GRANDE, 2006). Um exemplo de conversão pode ser observado na verificação de independência linear de vetores no R², a partir da representação no plano R².

Para Duval, do ponto de vista cognitivo, a conversão é a atividade de transformação fundamental, pois conduz mecanismos subjacentes à aprendizagem matemática, e ainda, constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de ser adquirida pelos alunos, pois a mudança dos registros gera obstáculos que não dependem da complexidade do campo conceitual, desse modo, uma aprendizagem centrada especificamente na mudança e coordenação de diferentes registros de representação produz excelentes resultados na compreensão (PINHEIRO, 2015).

Na figura 13, é possível observar o processo de conversão no qual podemos verificar se os vetores dados na representação geométrica são linearmente independentes, ao convertermos esses vetores as suas representações algébricas.

Figura 13: Vetores linearmente independente no R²




Fonte: Elaborado pelo autor

Lembremos da definição de vetores linearmente independente: 'Dizemos que um conjunto L = {$u_1, u_2, ..., u_n$} contido em V é *linearmente independente* (L.I.) se, e somente se, uma igualdade vetorial do tipo $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = 0$, com os $\alpha_i$ em R, admitir a solução única $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

Desse modo, escrevendo os vetores como combinação linear, igualando ao vetor nulo do R², e ainda resolvendo o sistema linear, tal que a, b ϵ R, temos:

$$a\,(1,2) + b\,(3,4) = (0,0) \rightarrow \begin{cases} a + 3b = 0 \\ 2a + 4b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \end{matrix}$$

Sendo assim, temos que os vetores (1,2) e (3,4) são linearmente independentes, fato que poderia ser observado devido ao fato de esses vetores não serem colineares. Nesse sentido, é possível observar que para a verificação da independência linear foi necessário a conversão da representação geométrica, pertencente ao sistema gráfico, à representação algébrica, pertencente ao sistema simbólico.

Duval enfatiza que matematicamente mais importante que as representações semióticas são as transformações que podem ser realizadas, sendo a conversão responsável por um papel fundamental na aprendizagem do ponto de vista cognitivo, visto que é subjacente a compreensão do objeto matemático, e possibilita a revelação das dificuldades do indivíduo ao lidar com este (MENDONÇA, 2017).

Além disso, a importância da conversão repousa no fato de que não existem regras para a realização da conversão, o que necessita de uma articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros, desse modo, passar de um registro de representação a outro não é somente reescrever de uma para outra forma o mesmo objeto, mas sim de perceber as propriedades e características daquele objeto explicitadas em cada representação semiótica.

Tendo em vista os conceitos apresentados da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, o próximo passo seria analisar os livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha, no entanto, se fez necessário uma teoria que possibilitasse sistematicamente uma análise crítica de modo a responder a questão norteadora deste trabalho. Desse modo, optou-se pela Teoria da Análise do Conteúdo de Laurence Bardin (2010), de modo a criar as categorias de análises dos livros.

## 3.2. TEORIA DA ANÁLISE DO CONTEÚDO

A manipulação de dados é uma das fases mais importantes de uma pesquisa científica, uma vez que é nessa fase que o pesquisador verificará se a hipótese delimitada inicialmente em seu estudo é correta ou não. Desse modo, analisar esses dados de maneira crítica e imparcial são características essenciais em qualquer pesquisa de cunho científico.

Para Campos (2004), a fase da análise dos dados em uma pesquisa científica é crucial, e a escolha de um método ou uma técnica é uma das fases mais importantes na execução desta, que requer do pesquisador muita atenção e cuidado, para que essa escolha seja adequada e proporcione a exploração desses dados com toda sua riqueza e possibilidades. Ainda pelo autor:

> No universo das pesquisas qualitativas, a escolha do método e técnicas para a análise de dados, deve obrigatoriamente proporcionar um olhar multifacetado sobre a totalidade dos dados recolhidos no período da coleta (corpus), tal fato se deve, invariavelmente, à pluralidade de significados atribuídos ao produtor de tais dados, ou seja, seu carácter polissémico numa abordagem naturalística (CAMPOS, 2004, p. 611).

É nesse contexto que surgiu a metodologia científica denominada Análise do Conteúdo, que por sua vez é definida como sendo 'um conjunto de técnicas de análises das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens' (BARDIN, 2010, p. 44). Em outras palavras, a análise do conteúdo nos possibilita inferir informações ocultas no texto, seja ele escrito, oral, em sinais, através de imagens ou sons, a partir de objetivos anteriormente definidos e mediante a decodificação da mensagem.

A análise do conteúdo foi desenvolvida no período da 2ª guerra mundial pela 'Divisão experimental para os estudos de comunicações em tempo de guerra' do congresso dos EUA, o qual tinha por objetivo sintetizar e compreender o conteúdo dos argumentos utilizados por jornais e propagandas inimigas. Posteriormente, ao final da guerra, foi aplicada a pesquisas de cunho científico de comunicação política, chegando ao Brasil 40 anos mais tarde (CARLOMAGNO & ROCHA, 2016).

O conteúdo de uma comunicação é tão rico e apresenta uma visão polissémica e valiosa, que expressivamente possibilita ao pesquisador uma variedade de interpretações. O ponto chave dessa situação, em relação à abordagem desses conteúdos, está em como visualizá-lo num campo objetivo, a princípio mais concreto e no campo simbólico, ou seja, aquilo que não é de fácil visualização na mensagem (CAMPOS, 2004).

Sendo assim, o ápice da Análise do conteúdo são as inferências acerca das mensagens, e por isso produzir inferências nessa metodologia não significa somente produzir suposições subliminares acerca de cada mensagem, mas sim embasá-las em pressupostos teóricos de diversas concepções de mundo e com as situações concretas de seus produtores ou receptores que é visualizada segundo o contexto histórico e social de sua produção e recepção.

Para Bardin (2010), podemos afirmar que a Análise do conteúdo é norteada por dois grandes objetivos, quais sejam *A superação de incertezas* e *Enriquecimento da leitura*, que são definidos pela autora da seguinte forma:

> **A superação da incerteza** – o que eu julgo ver na mensagem estará lá efetivamente contido, podendo esta 'visão' muito pessoal ser partilhada por outros? Por outras palavras, será a minha leitura válida e generalizável?
> **Enriquecimento da leitura** – Se um olhar imediato, espontânea, é já fecundo, não poderá uma leitura atenta aumentar a produtividade e pertinência? (BARDIN, 2010, p. 35, grifo nosso).

Em meu caso, ao utilizar esses objetivos nas análises dos livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme La Penha, não estaria eu realizando uma análise documental ao invés de uma análise do conteúdo? A resposta é não, pois embora a análise documental tenha características semelhantes à análise do conteúdo, entre elas há grandes diferenças metodológicas.

A análise documental é definida como sendo 'uma operação ou um conjunto de operações visando representar o conteúdo de um documento sob uma forma diferente do original, a fim de facilitar, num estado ulterior, a sua consulta e referenciação' (BARDIN, 2010, p. 51). O objetivo dessa análise é apenas de representar de maneira condensada a informação contida nos documentos para consulta e informação.

De maneira contrária, a Análise do conteúdo visa não somente analisar os documentos, mas sim manipular as mensagens contidas nestes, com o propósito de evidenciar indicadores que possibilitam a realização de inferências sobre outra realidade que não a da mensagem, ou seja, a análise documental trabalha com documentos e a Análise do conteúdo com mensagens da comunicação.

Embora o método da Análise do conteúdo seja comumente utilizado nas ciências sociais, o seu caráter marcado por uma disparidade de formas e adaptável a um campo de aplicação muito vasto (as comunicações), abre portas para outras áreas, dentre estas, a Matemática; fato que nos motivou a utilizá-la para analisar os livros em questão.

Segundo Bardin (2010), essas inferências são alcançadas a partir de um roteiro pré-estabelecido que são organizados em torno de três polos cronológicos, sejam elas *Pré-análise, Exploração do Material* e *Tratamento dos resultados obtidos na interpretação.* No entanto, para a execução desses três polos, é necessário de antemão, que o autor realize a *leitura flutuante.*

A leitura flutuante é caracterizada por Bardin (2010), como a fase do primeiro contato com os documentos que serão analisados, na qual o pesquisador conhece o texto e deixa-se invadir por impressões e orientação, para posteriormente essa leitura se tonar mais precisa, em função de hipóteses emergentes e/ou da projeção de teorias adaptadas sobre o material.

A *Pré-análise*, embora seja uma fase de intuições, tem por objetivo a organização, através da operacionalização e sistematização das ideias iniciais, de maneira a conduzir um esquema preciso de desenvolvimento das operações sucessivas de análise, na qual há a *escolha dos documentos a serem analisados, a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final*, não cronologicamente nessa ordem (BARDIN, 2010).

No que diz respeito a *escolha dos documentos a serem analisados*, Bardin (2010), salienta que essa escolha pode ser feita através das quatro regras, a saber: *exaustividade, representatividade, homogeneidade e pertinência*. A *exaustividade* trata de uma escolha na qual delimita-se um período, um assunto ou autor, no qual todo os documentos que se encaixam nessa delimitação devem ser levados em consideração na pesquisa.

A regra da *representatividade*, ocorre quando utilizamos uma amostra representativa do universo inicial, ou seja, os resultados obtidos das análises dessa amostra podem ser generalizados a todo universo inicial. Nem todo material de análise é suscetível de dar lugar a uma amostragem, e nesse caso recomenda-se a redução do universo inicial para uma melhor análise (BARDIN, 2010).

Sobre a regra da *homogeneidade*, ela geralmente é utilizada quando o objetivo da pesquisa é a obtenção de resultados globais ou a comparação entre si de resultados individuais, onde os documentos retidos devem ser homogêneos, ou seja, devem obedecer a critérios precisos de escolha e não apresentar grandes singularidades. Na regra de *pertinência*, por sua vez, os documentos em questão devem estar de acordo com os objetivos da pesquisa, a fim de tornar a análise significativa.

Neste trabalho, as regras adotadas para a escolha dos livros analisados foram duas, sejam elas: *Representatividade*, uma vez que ao verificar quais representações de (in)dependência linear, geradores, base e dimensão num espaço vetorial segunda a TRRS estão constantes nos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha, podemos tomar essa amostra como representativa das representações adotados no livros como um todo.

Outra regra adotada foi a *Pertinência,* pois os livros escolhidos tomados para a análise estão de acordo com o objetivo da pesquisa ‘Identificar as representações de (in)dependência linear, geradores, base e dimensão num espaço vetorial constantes nos livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica’, visto que tais livros contém os conteúdos supracitados.

Sobre a *formulação de hipóteses,* ela é definida como sendo uma afirmação provisória, que, a partir dos procedimentos de análise, será afirmada ou não. Essa hipótese geralmente está embasada nos pressupostos teóricos adotado no início do trabalho, entretanto, segunda Bardin (2010), as hipóteses nem sempre são estabelecidas na Pré-análise, pois não se trata de uma fase obrigatória subjacente às análises. Desse modo, há a possibilidade da execução de uma pesquisa científica sem uma hipótese antecedente às análises.

A respeito da *elaboração de indicadores que fundamentam a interpretação*, são elementos de marcação que permitem extração das comunicações a essência de sua mensagem. É nesta etapa que há as operações de recorte do texto em unidades comparáveis de categorização para análise temática e de algumas das modalidades de codificação para o registro dos dados (BARDIN, 2010).

No que concerne a fase de *exploração do material*, de acordo com Bardin (2010), ela é basicamente uma aplicação sistemática das decisões tomadas na Pré-análise, onde o analista realiza operações de codificação, enumeração ou categorização, em função de regras previamente formuladas. Dentre estas, a categorização, auxilia na organização dos dados brutos a fim de uma melhor análise, pois fornece de forma condensada uma representação simplificada destes, uma vez que evita desvios do material e dá conhecimento dos índices invisíveis ao nível dos dados brutos.

Para esse fim, segundo Bardin (2010), é necessário criar boas categorias de análises, e para isso alguns requisitos são essenciais, tais como *exclusão mútua; homogeneidade; pertinência; objetividade e finalidade e produtividade.* A *exclusão mútua*, baseia-se na ideia de que cada elemento não pode se encaixar em mais de uma categoria.

A *homogeneidade* das categorias*,* é uma condição necessária à *exclusão mútua*, pois trata-se da ideia de que um único princípio de classificação deve governar a organização. A *pertinência* está relacionada com as condições categorias, isto é, as categorias devem refletir os objetivos da pesquisa, bem como as questões norteadoras desta.

A *objetividade e finalidade*, são princípios que devem nortear todas as análises, dado que as diferentes partes de um mesmo material, ao qual se aplica a mesma grade categorial, devem ser codificadas da mesma maneira, ao evitar distorções. A *produtividade*, é resultado de todas as qualidades anteriores, pois boas categorias, fornecem dados fieis, e assim, análises pertinentes.

Após esse momento, o próximo passo é o tratamento dos resultados obtidos na interpretação, pois o analista tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis, pode então propor inferências e adiantar intepretações a propósito dos objetivos previstos ou outras descobertas (BARDIN, 2010).

Diante dos pressupostos metodológicos elencados e considerando a questão norteadora desse trabalho, no intuito de uma melhor organização dos dados e fluidez do trabalho, criamos três categorias de análise a fim de obter inferências relevantes à nossa pesquisa, sejam elas:

(i) Introdução do conteúdo

Nesta categoria, tenho por objetivo verificar de que forma são introduzidos os conteúdos de (in) dependência linear, geradores, base e dimensão num espaço vetorial nos livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha.

(ii) Definição do objeto Matemático

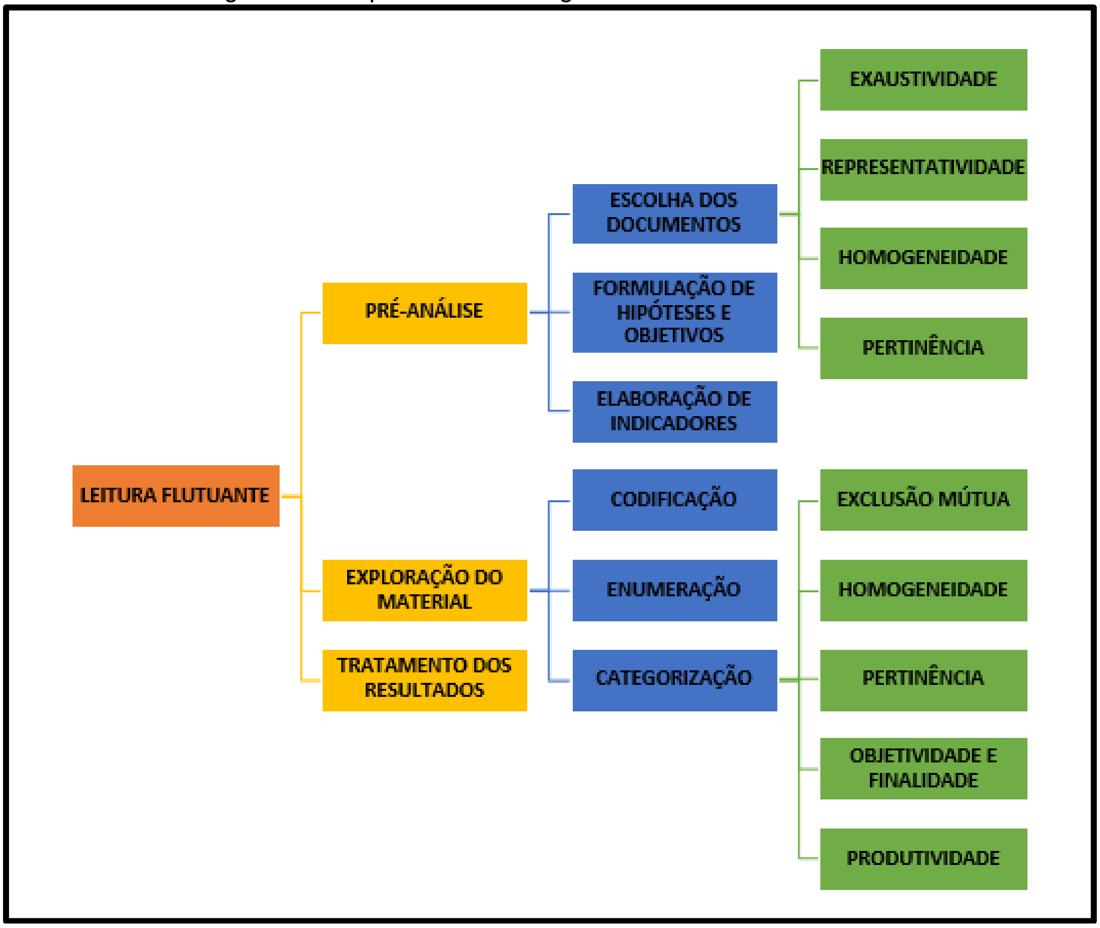
Esta categoria é responsável pela observação do modo de definição de (in) dependência linear, geradores, base e dimensão num espaço vetorial nos livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha.

(iii) Utilização de mais de uma representação do objeto Matemático.

Na terceira busco identificar quais representações são utilizadas nos livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha, bem como de estudar a forma como são trabalhadas essas representações nesses livros.

Para um melhor entendimento dos procedimentos metodológicos da Análise do conteúdo pelo leitor, foi elaborado um esquema com o propósito de tornar esses aspectos metodológicos mais claros.

Figura 14: Esquema metodológica da Análise do conteúdo




Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Diante das categorias elencadas, na próxima seção apresento os livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha, os quais serão analisados sob essas categorias, em virtude de apresentar a organização de cada livro a respeito da disciplina de Álgebra Linear, assim como a abordagem metodológica destes.

# 4. DESCRIÇÃO DOS LIVROS

Nesta seção apresento os livros *Álgebra Linear I e II (1974), Sinopse de Álgebra Linear (1975) e Introdução à Álgebra Linear (1977)*, de autoria de Guilherme de La Penha, no intuito de descrever os conteúdos constantes nestes livros, bem como as abordagens metodológicas presentes nestes.

## 4.1. Álgebra Linear I e II (1974)

O livro *Álgebra Linear I* de autoria de Guilherme de La Penha e Mina Seinfeld de Carakushansky, publicado pela UFRJ em 1974, é composto por cinco capítulos, sejam eles: Noções de conjuntos e vetores; Sistemas de Equações Lineares; Espaços Vetoriais; Transformações Lineares e Introdução à programação Linear.

No capítulo 0 são tratadas as propriedades básicas e operacionais de conjuntos e vetores, com introdução de espaço vetorial; e no primeiro capítulo são discutidos sistemas de equações lineares e tópicos relacionados aos estudos das matrizes. O segundo capítulo é voltado aos estudos dos espaços vetoriais, contendo os tópicos de definição espaço vetorial, (in) dependência linear, bases e isomorfismo de espaços vetoriais.

O terceiro capítulo trata das transformações lineares, no qual estão presentes tópicos como representação de uma transformação linear; espaço imagem e núcleo de uma transformação linear; operações com transformações lineares; posto de uma matriz e espaços duais. Finaliza-se o supracitado livro com o quarto capítulo, voltado a introdução a programação linear, através da abordagem de conjuntos convexos e programação linear propriamente dito.

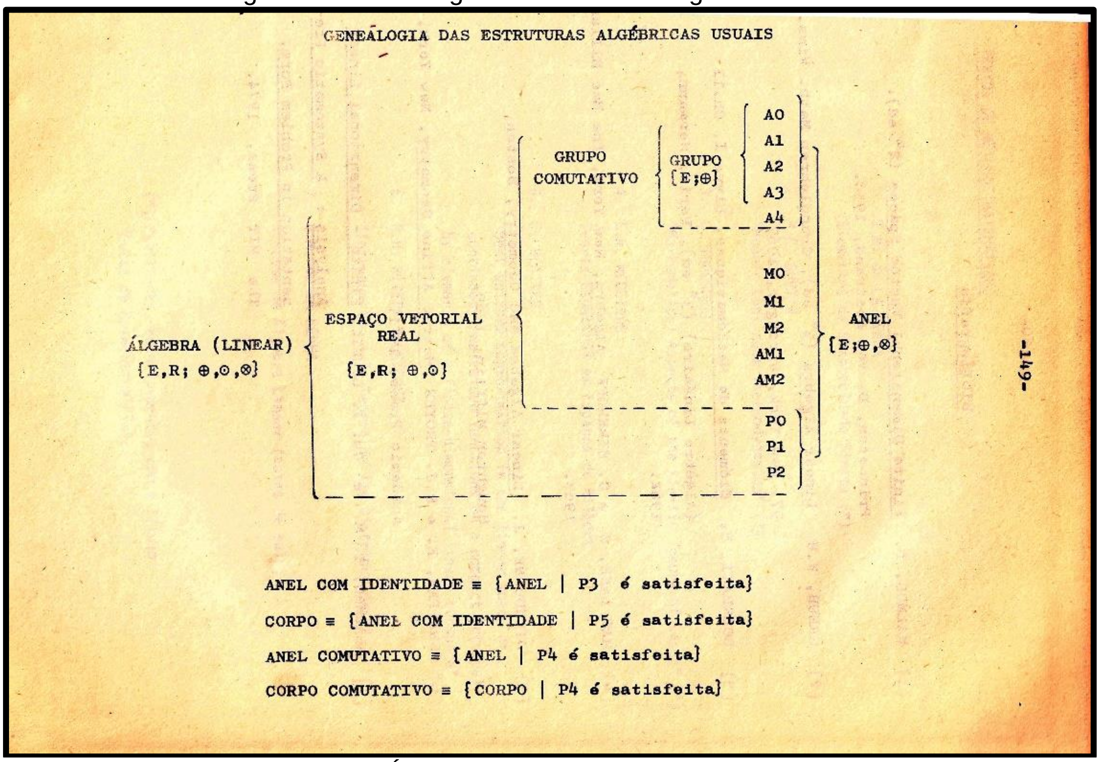
O livro *Álgebra Linear II*, também datado de 1974, é uma continuação do livro *Álgebra Linear I* e é composto por três capítulos, denominados como continuação dos capítulos do livro anterior, sejam eles: determinantes, autovetores e autovalores e, por fim, espaços com produto interno, além de conter apêndices sobre ângulos de Euler, notações Σ e π e operações algébricas.

No quinto capítulo, voltado aos determinantes, são tratados tópicos como função volume e determinante; permutações e cálculo de determinantes; produto e transpostas; cofatores e menores; matriz adjunta; determinantes de Vandermonde; unicidade da função determinante; regra de Cramer; determinante de um sistema de vetores com relação a uma base; determinante de uma transformação linear em v, volumes, determinantes e orientação, e por fim, posto e determinante.

O sexto capítulo, sobre auto-valores e auto-vetores, trata de deformação planas; movimento harmônico; polinômios característicos; diagonalização de matrizes e transformações lineares e introdução à forma cônica de Jordan. No sétimo capítulo, sobre espaços com produto interno, estão presentes distâncias, ângulos e produto interno; bases ortogonais em $R^n$; espaços com produto interno; polinômios de Legendre; transformações lineares ortogonais e matrizes ortogonais, e por último, movimentos rígidos em $R^2$ e $R^3$. Além dos capítulos supracitados, o livro *Álgebra Linear II* contém dois apêndices a respeito das notações de Σ e π e operações algébricas.

É importante ressaltar que ao final do livro, Guilherme de La Penha, apresenta um esquema a respeito das genealogias das estruturas algébrica, com legendas, a fim de esclarecer essas estruturas. Na figura 15 é possível observar esse esquema.

Figura 15: Genealogia das estruturas algébricas usuais




Fonte: Álgebra Linear I e II (1974, p. 113)

É possível observar que nos Livros de *Álgebra Linear I* e *II (1974)*, La Penha buscou utilizar uma linguagem clara e objetiva, que parte do intuitivo rumo a formalização, e ainda é notório a presença de muitos exemplos e exercícios após cada tópico apresentado, de modo a efetivar a aprendizagem dos conceitos trabalhados. Tais características são esmiuçadas nas análises dos livros na seção seguinte.

## 4.2. Sinopse de Álgebra Linear (1975)

O livro Sinopse de Álgebra Linear, foi publicado também pela UFRJ em 1975 e tem como autores Luiz Medeiros, Guilherme de La Penha e Gustavo Menzala. Essa obra é dividida 17 partes, sejam elas: notação; espaços vetoriais; dependência linear e bases; construção de bases e dimensão; aplicações lineares – isomorfismo I; aplicações lineares – isomorfismo II; subespaços; estrutura das aplicações lineares; inversas; espaços quocientes; invariância, reducibilidade e projeções e valores e vetores característicos, sendo esse último complementado pelo apêndice corpos algebricamente fechados.

Além disso, há também tópicos como complexificação; formas bilineares; dualidade; matrizes; formas cônicas de transformações lineares; formas matriciais canônicas – forma de Jordan. Por fim, tem-se os apêndices sobre operações algébricas e genealogia das estruturas algébricas usuais, no qual há novamente a presença do esquema apresentado no livro *Álgebra Linear I* (figura 15).

É observável também a presença de uma apresentação do livro intitulada 'Ao leitor', na qual La Penha afirmou que estas notas são exposições feitas por ele ao longo das vezes que ministrou a disciplina de Álgebra Linear para estudantes que iniciaram mestrado na COPPE e IM-UFRJ entre 1970 e 1973, e ainda justificou a ausência de alguns tópicos:

> Estas notas reproduzem literalmente as exposições feitas por mim, ao longo das vezes que ministrei a disciplina de Álgebra Linear para estudantes que iniciaram mestrado, tanto na COPPE quanto no IM-UFRJ, no período de 1970-1973. O conteúdo, afora os exercícios e exemplos é, exatamente, o adequado a 36 horas de aulas em um período. A eliminação de exercícios e exemplos, é contingência para tornar o texto compacto. Entretanto, algumas proposições deixadas sem demonstração podem servir como exercícios simples. Ao publicá-lo, pensei unicamente em elaborar um 'plano de aulas',

> acessível para a disciplina, facilitando o trabalho de docentes que, porventura, venham a ministrá-la. Obviamente, o conteúdo reflete, em parte, as minhas preferências sob o vínculo do número limitado de aulas. De modo geral, entretanto, o espectro essencial da disciplina é abordado, a bibliografia mencionada dá ampla margem à desenvolvimentos, qualquer que seja direção. Sacrifiquei o estudo de espaços com produto interno em troca do estudo das dualidades; com esta base, a compreensão algébrica do produto interno se torna simples. Também o teorema espectral e o estudo de determinantes não foram abordados para dar lugar a formas canônicas. O primeiro, se deu à omissão do detalhamento de transformações lineares em espaços com produto interno, o segundo, por ser incluído, de modo natural, ao abordar-se álgebra multilinear. Pretendo posteriormente publicar mais detalhadamente a decomposição de Jordan juntamente com exemplos e aplicações desenvolvendo o esboço contido nestas notas. Durante os vários estágios de meu trabalho de pesquisa e ensino de pós-graduação, os auxílios do BNDE, FINEP, CNPq e CEPG-UFRJ, foram preciosos e são, oportunamente, aqui agradecidos. Agradeço a GUSTAVO PERLA MENZALA pela cuidadosa leitura do texto final e pelos comentários e sugestões apresentados embora não tendo sido possível incorporá-los todos na presente versão. A WILSON GOES cabem os louros de uma excelente datilografia, a partir de um execrável manuscrito (MEDEIROS, LE PENHA & MENZALA, 1975, ´p. 1-2).

Em relação a abordagem metodológica, é notório que é um livro compacto, com poucos exemplos, no qual há algumas proposições demonstradas e outras a título de exercícios, além disso, há a ausência de alguns conteúdos referente a Álgebra Linear justificada na apresentação ‘ao leitor’.

Numa visão geral, é percebido que o livro *Sinopse de Álgebra Linear* não é adequado para aqueles que terão um primeiro contanto com essa disciplina, visto que a linguagem presente neste tem um maior nível de abstração, e ainda não são explicados alguns conceitos pois, em nossa visão, acreditamos que a propriedade desses conceitos seja pré-requisito para tal estudo, visto que esse livro foi escrito com base nas aulas ministradas por La Penha na COPPE e IM-UFRJ.

## 4.3. Introdução a Álgebra Linear (1977)

O livro *Introdução a Álgebra Linear* é datado de 1976, e é de autoria de Guilherme de La Penha, devido sua experiência em ministrar e coordenar as disciplinas de Álgebra I e II, em parceria com Mina Seinfeld de Carakushansky. É importante salientar que esse livro foi publicado pela McGraw-Hill em 1977, e adotado em diversas universidades brasileiras, e ainda em universidades da

América Latina como *'Introducción al álgebra linear'*, traduzido por professores de Bogotá.

É pertinente ressaltar que os autores, no prefácio do livro, dissertam sobre o objetivo deste e quais pressupostos tiverem em sua organização, com destaque para os cálculos e interpretações geométricas no $R^2$ e $R^3$, fato que pode ser contatado quando afirmam:

> Embora objetivando servir a propósitos de nível universitário, o texto abrange detalhadamente tópicos que são exigidos usualmente nos programas de exames vestibulares e nas últimas séries do 2º grau. Assim, o nível do texto situa-se nessa região de transição, tendo sido envidados esforços no sentido de torna-lo totalmente acessível ao estudante nesse estágio. Como os métodos de Álgebra Linear constituem novidade para muitos estudantes, a ênfase reside em cálculos e interpretações geométricas em $R^2$ e $R^3$, de modo a dar tempo para que absorvam conceitos com os quais não estejam familiarizados. Desse modo teve-se em mente as seguintes regras mestras: (1) o texto deveria ser de conteúdo tão geométrico quanto possível, objetivando-se amenizar sua abstração natural; (2) a abordagem de determinantes deveria ser breve, porém calcada em conceitos úteis para generalizações, desenfatizando-se seu caráter de ferramenta de cálculo de baixa eficiência e discutida utilidade; (3) os tópicos a serem abreviados sob pressão de tempo limitado para expô-los deveriam ser os espaços vetoriais e as transformações lineares, sob o ponto de vista intrínseco. (CARAKUSHANSKY & LA PENHA, 1977, p. IX e X)

No que se refere a organização dos conteúdos, esse livro é dividido em cinco capítulos: Álgebra vetorial e geometria em $R^2$ e $R^3$; sistemas de equações lineares e matrizes; espaços vetoriais; transformações lineares e determinantes. No primeiro capítulo, sobre álgebra vetorial e geometria em $R^2$ e $R^3$, são encontrados os tópicos vetores geométricos; vetores de coordenadas; retas e planos e geometria euclidiana no plano e no espaço.

O segundo capítulo, que trata de sistemas de equações lineares e matrizes, disserta sobre sistemas de equações lineares; álgebra das matrizes; matrizes e sistemas de equações lineares. No terceiro capítulo, a respeito de espaço vetoriais, estão constantes os tópicos de conceitos básicos; dependência linear; independência linear; bases e espaços vetoriais isomorfos.

No quarto capítulo, sobre determinantes, são trabalhados conceitos básicos; espaço imagem de uma transformação linear; núcleo de uma transformação linear; operações com transformações lineares e posto de uma matriz. O quinto capítulo, de determinantes, é voltado a introdução como uma forma de volume; função determinante; transposta e produto; cofatores e menores e regra de Cramer.

Em relação a abordagem metodológica dos conteúdos, percebe-se que é um livro mais completo diante dos anteriores, com uma linguagem clara e objetiva, explicações mais detalhadas e uma preocupação com conexão desses conteúdos à Matemática da educação básica, e ainda observa-se também a presença de muitos exemplos e exercícios. Além disso, é possível perceber que o livro *Introdução a Álgebra Linear incorpora o livro Álgebra Linear I e II*, uma vez que o primeiro é uma adaptação do segundo somado a experiência docente do autor. Esse fato pode ser constatado na seção seguinte a respeito das análises dos livros.

Após a apresentação dos livros é possível perceber que estes, embora tratem do mesmo assunto, tem organizações e metodologias diferenciadas, uma vez que cada livro tem determinado objetivo ou é voltado a um determinado público. Na próxima seção apresento as análises dos tópicos (in)dependência linear, geradores, base e dimensão num espaço vetorial constantes nos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha, com base nas categorias criadas anteriormente.

# 5. ANÁLISE DOS LIVROS

Nesta seção, apresenta-se as análises dos tópicos (in)dependência linear geradores, base e dimensão num espaço vetorial constantes nos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha, com base nas categorias supracitadas na seção teórica: (i) Introdução do conteúdo; (ii) Definição do objeto Matemático e (iii) Utilização de mais de uma representação do objeto Matemático, com o propósito de responder a questão norteadora desse trabalho.

As análises estão separadas por livros, os quais estão divididos em três partes, sejam elas: (in)dependência linear, geradores, base e dimensão, sendo que em cada parte analisa-se as três categorias supracitadas. Ao final de cada livro expõe-se uma visão geral deste, bem como destaca-se particularidades e padrões de cada livro.

Ao final, faz-se uma análise global das partes analisadas dos livros de Álgebra Linear à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, assim como salienta-se aproximações e distanciamento destes no que concerna a abordagem metodológica. Desse modo, para uma melhor visualização e fluidez das análises, renomeamos os livros da seguinte forma, *Álgebra Linear I e II (1974)* - Livro AL1; *Sinopse de Álgebra Linear (1975)* – Livro AL2 e *Introdução a Álgebra Linear (1977) – Livro AL3.*

## 5.1. ANÁLISE DO LIVRO AL1

### 5.1.1. (In)dependência linear

*(i) Introdução do conteúdo*

No livro AL1 o tópico de dependência linear é iniciado a partir de um exemplo numérico da escrita de um determinado vetor como combinação linear dos vetores das bases canônicas do $R^3$:

> Consideremos o vetor V1 = [8, -9, 2] de $R^3$. Este vetor pode ser escrito como 8 [1,0,0] + (-9) [0,1,0] + 2 [0,0,1]. De fato, se [x1, x2, x3] é qualquer vetor em $R^3$, temos que [x1, x2, x3] = x1 [1,0,0] + x2 [0,1,0] + x3 [0,0,1]. Vemos assim, que <u>qualquer</u> vetor do $R^3$, pode ser expresso em termos dos três vetores fixos [1,0,0], [0,1,0] e [0,0,1]. Queremos estudar agora o processo de geração de vetores e subespaços (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1974, p. 217).

Em relação a independência linear, La Penha e Mina trazem essa ideia com base em conceitos anteriormente definidos como de geradores, combinação linear e dependência linear.

> É óbvio que é mais fácil trabalhar com conjuntos finitos do que com conjuntos infinitos. Assim, em lugar de termos que saber quais são todos os vetores em v, podemos escolher um conjunto de vetores que gerem v (...). Se o conjunto de geradores é linearmente dependente, podemos eliminar alguns dos vetores e ainda ter um conjunto de geradores. Se o novo conjunto ainda é linearmente dependente, podemos eliminar outros vetores, e assim por diante, pelo método da exaustão. O conjunto ideal de vetores ao qual queremos chegar é que gere o espaço vetorial, mas que não seja linearmente dependente (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1974, p. 225).

Percebe-se que os autores buscam introduzir a ideia de dependência linear a partir de um exemplo numérico, para depois formalizar as noções de combinação linear, geradores e dependência linear. Independência linear, por sua vez, é tratada a partir da ideia da redução de vetores geradores linearmente dependentes até que eles deixem de ser linearmente dependentes. Desse modo, observa-se uma interrelação entre os tópicos constantes nos livros promovida pelos autores, que fornece ideia de complementação das definições.

*(ii) Definição do objeto matemático*

Dependência linear é assim definida no AL1:

> Um conjunto não vazio de vetores {V1, V2, ..., Vk} de um espaço vetorial v é chamado <u>Linearmente dependente</u> (abreviamente LD) se e somente se (pelos menos) um dos vetores Vi é combinação linear dos demais vetores desse conjunto, isto é, se e somente se, para algum Vi, podemos achar escalares convenientes designados por C1 tais que V1 = C1V1 + C2V2 + ... + Ci-1Vi-1 + Ci+1Vi+1 + ... + CkVk (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1974, p. 218).

Como discutido anteriormente, os autores partem da ideia de redução de vetores geradores linearmente dependentes até que eles deixem de ser linearmente dependentes, desse modo esse novo conjunto de vetores é assim definido: ‘Um conjunto de vetores {V1, V2, ..., Vk} é <u>Linearmente independente</u> se e somente se $C_1V_1 + C_2V_2 + ... + C_nV_n = 0$ implica no fato de todos os Ci’s serem iguais a zero’ (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1974, p. 225).

Observa-se que, embora sejam utilizados exemplos numéricos para a concretização das definições, os autores não abandonam a definição formal de (in)dependência linear, mas a complementa a partir dessas ideias numéricas. Além disso, observa-se uma interrelação entre os conceitos trabalhados, o que demonstra uma coerência de ideias.

*(iii) Utilização de mais de uma representação do objeto matemático*

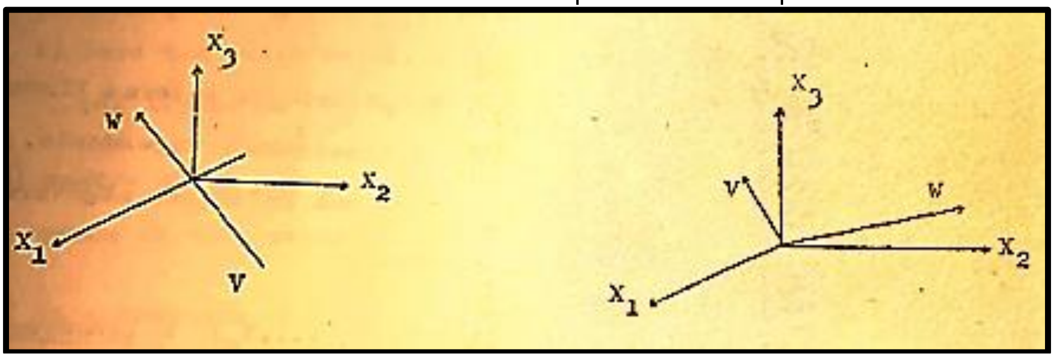
No livro AL1 Identificou-se pelo menos três formas de representação de (in)dependência linear. A exemplo das representações de Independência linear, verificamos três representações, sejam elas:

**Representação em linguagem natural:** 'É evidente que V e W são linearmente independente se e somente se um não é múltiplo escalar do outro' (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1974, p. 226).

**Representação algébrica:** '$C_1V_1 + C_2V_2 + ... + C_nV_n = 0 \rightarrow c_i = 0$'

**Representação geométrica:** Os autores salientam que dois vetores são linearmente dependentes se são colineares, caso contrário serão linearmente independentes.

FIGURA 16: Vetores linearmente dependentes e independentes




Fonte: La Penha & Carakushansky (1974, p. 227)

A respeito das análises dos tópicos (in)dependência linear no livro AL1, observou-se que os autores buscam partir de ideias numéricas de modo a concretizá-las a fim de dar suporte as definições. Além disso, os autores utilizaram as representações em linguagem natural, algébrica e geométrica na representação do supracitado objeto matemático.

5.1.2. Geradores

*(i) Introdução do conteúdo*

A introdução à geradores é feita a partir da definição de combinação linear, no qual os autores realizam uma analogia à vetores criadores de outros vetores:

> Pode-se afirmar que o vetor [8, -9, 2] é uma combinação linear dos vetores [1,0,0], [0,1,0] e [0,0,1], os escalares correspondentes a estes vetores sendo respectivamente 8, -9 e 2. Vimos ainda, uma propriedade mais forte e é que qualquer vetor [$x_1$, $x_2$, $x_3$] é uma combinação linear do conjunto {[1,0,0]. [0,1,0], [0,0,1]}. Neste caso geral, os escalares correspondentes (a esses vetores) são $x_1$, $x_2$ e $x_3$, isto é [$x_1$,$x_2$,$x_3$] = $x_1$ [1,0,0] + $x_2$ [0,1,0] + $x_3$ [0,0,1]. Quando se tem um conjunto de vetores que 'criam' todos os vetores do espaço vetorial considerado, diz-se que este conjunto <u>GERA</u> o espaço. De uma maneira mais precisa temos a definição que segue (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1974, p. 218).

Acredito que a analogia feita pelos autores de que vetores geradores são aqueles que criam outros vetores, tinha o intuito de deixar claro ao leitor a compreensão da ideia de que existem vetores que podem gerar um espaço vetorial.

*(ii) Definição do objeto matemático*

Vetores geradores de um espaço vetorial é assim definido:

> Seja {$v_1$, $v_2$, ..., $v_k$} um conjunto não vazio de vetores de um espaço vetorial V. Se <u>qualquer</u> vetor $v \in V$ pode ser representado como combinação linear dos vetores $v_1$, $v_2$, ..., $v_k$ (isto é, se $v = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_kv_k$, para certos escalares $c_1$, $c_2$, ..., $c_k$) então o conjunto de vetores {$v_1$, $v_2$, ..., $v_k$} <u>GERA</u> o espaço V (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1974, p. 218).

É possível perceber novamente que La Penha e Mina não abandonam o formalismo nas definições dos objetos matemáticos, no entanto utilizam das ideias introdutórias como suporte para a definição formal do objeto matemático.

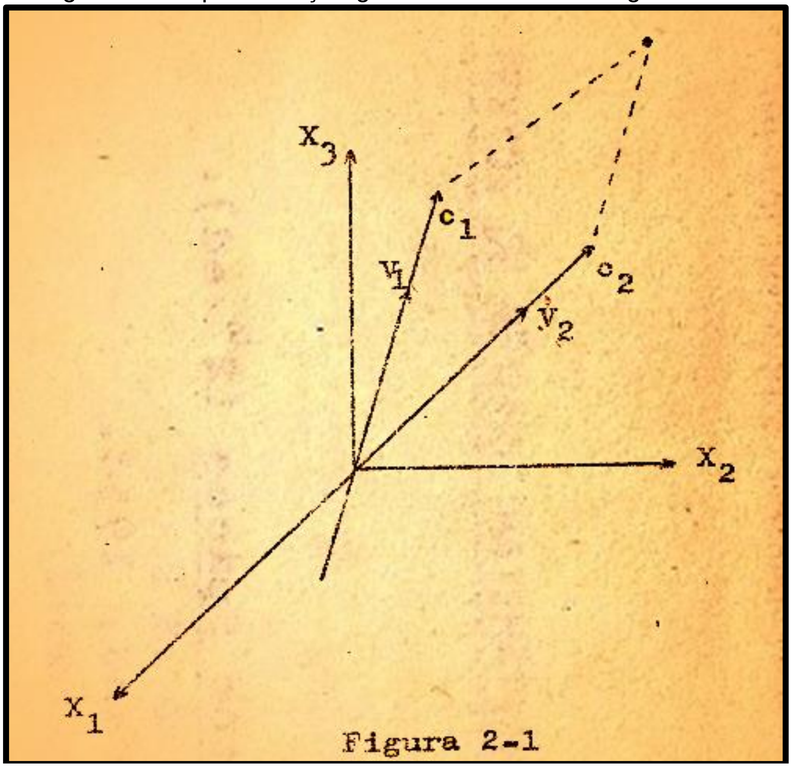
*(iii) Utilização de mais de uma representação do objeto matemático*

Em relação a utilização de representações acerca da ideia de vetores geradores, foi identificado duas representações:

**Representação em linguagem natural:** 'Quanto se tem um conjunto de vetores que 'criam' todos os vetores do espaço vetorial considerado, diz-se que este conjunto <u>GERA</u> o espaço' (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1974, p. 218)

**Representação geométrica:** Os autores ressaltam uma explicação acerca do processo de geração de vetores, sobre a seguinte representação geométrica:

Figura 17: Representação geométrica de vetores geradores




Fonte: LA PENHA & CARAKUSHANSKY (1974, p. 218)

Os autores dissertam sobre o processo geométrico de geração de vetores da seguinte forma:

> Para esclarecer o significado geométrico do processor de geração, vamos descrever o espaço gerado por ‘dois vetores não colineares $v_1$ e $v_2$ em $E_3$. Mostraremos que este espaço consiste daqueles vetores que estão no plano que passa pela origem e que é determinado pelos vetores $v_1$ e $v_2$.
> Notemos primeiro, que pelo significado geométrico de adição de vetores e multiplicação escalar, qualquer combinação linear de $v_1$ e $v_2$ deverá estar no plano determinado por $v_1$ e $v_2$. Pois $c_1v_1$ está sobre a reta determinado por $v_1$ e $c_2v_2$ está sobre a reta determinado por $v_2$. Como $c_1v_1 + c_2v_2$ está no plano em que estão $c_1v_1$ e $c_2v_2$, $c_1v_1 + c_2v_2$ está no plano determinado por $v_1$ e $v_2$.
> Por outro lado seja P um ponto do plano determinado pelos vetores não colineares $v_1$ e $v_2$. Neste plano, construímos uma reta $R_{v1}$ que passa pelo ponto P e é paralela ao segmento de reta associado ao vetor $v_1$. Como $v_1$ e $v_2$ não são colineares, $R_{v1}$ não é paralela a reta gerada por $v_2$ e portanto intersecta nalgum ponto, suponhamos que seja no ponto terminal de $c_2v_2$. Analogamente, se construímos uma reta $R_{v2}$ que passa ponto P e é paralela ao vetor $v_2$, vemos que ela intersecta a reta gerada pelo vetor $v_1$ no ponto terminal de algum vetor $c_1v_1$. Desta construção, P é necessariamente o ponto terminal da diagonal de um paralelogramo que tem lados adjacentes representados pelos vetores $c_1v_1$ e $c_2v_2$. Assim se w é um vetor que termina em P, $w = c_1v_1 + c_2v_2$. Logo qualquer vetor que está no plano determinado por $v_1$ e $v_2$, é uma combinação linear de $v_1$ e $v_2$. (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1974, p. 220 – 222)

É notório, diante das análises, que os autores do livro L1, no que diz respeito ao tópico de geradores do espeço vetorial, o define a partir de uma analogia de ‘vetores criadores’ de modo a tornar concreta a definição posterior. Sobre o uso das representações, foi constatado o uso das representações em linguagem natural e representação geométrica.

### 5.1.3. Base e Dimensão

*(i) Introdução do conteúdo*

No que se refere a introdução ao tópico da base de um espaço vetorial, os autores dissertam sobre a seguinte situação:

> Consideremos em $R^n$, o conjunto de vetores $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ onde $e_i$ é o vetor que tem zeros em todas as componentes exceto na i-ésima, e 1 na i-ésima componente
>
> $$e_1 = [0, ..., 0, 1, 0, ..., 0]$$
>
> Observamos primeiro que estes vetores são linearmente dependentes. Pois supondo que
>
> $$c_1e_1 + c_2e_2 + ... + c_ne_n = 0$$
>
> Temos que
>
> $$c_1 [1, 0, ..., 0] + c_2 [0,1, ..., 0] + ... + c_n [0,0, ..., 1] = 0$$
>
> ou
>
> $$[c_1, c_2, ..., c_n] = [0,0, ..., 0].$$
>
> Assim:
>
> $$c_1 = c_2 = ... = c_n = 0.$$
>
> Os vetores $e_1$, $e_2$, ..., em também geram $R^n$, pois se $v \in R^n$, $v = [x_1, x_2, ..., x_n] = x_1 [1, 0, ..., 0] + x_2 [0,1, ..., 0] + ... + x_n [0,0, ..., 1] = x_1e_2 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$. Como cada vetor v pode ser escrito como uma combinação linear de $e_1$, $e_2$, ..., $e_n$, vemos que $e_1$, $e_2$, ..., $e_n$ geram $R^n$. Conjuntos desse tipo, que são linearmente independentes e que geram o espaço ao qual pertencem são muito importantes na teoria de espaços vetoriais (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1974, p. 235 – 236).

É possível perceber que, diante da situação apresentada, os autores apresentam intuitivamente as condições necessárias para que um conjunto de vetores seja uma base de um espaço vetorial, bem como deixam claros os motivos dessas condições serem necessárias.

*(ii) Definição do objeto matemático*

No livro AL1, os autores definem base de um espaço vetorial da seguinte forma: ‘Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é dito uma base para v se é linearmente independente e gera v (LA PENHA & CARAKUSHANSKY, 1974, p. 236).

A definição de dimensão de um espaço vetorial também é apresentada da seguinte forma:

> Seja v ≠ 0 um espaço vetorial. Então a dimensão de v é o número de vetores de uma base de v. No caso em que v = {0} dizemos que v tem dimensão zero. Quando o número de vetores de uma de v é finito diz-se que v é um espaço vetorial de dimensão finita (LA PENHA & CARAKUSHANSKY, 1974, p. 238).

Ao observar as definições de base e dimensão num espaço vetorial, é possível compreender a importância da ideia introdutória vista anteriormente, uma vez que dá bases para melhor entender as definições em questão.

*(iii) Utilização de mais de uma representação do objeto matemático*

No que diz respeito ao uso de representações acerca de base e dimensão num espaço vetorial, foi identificado as seguintes representações:

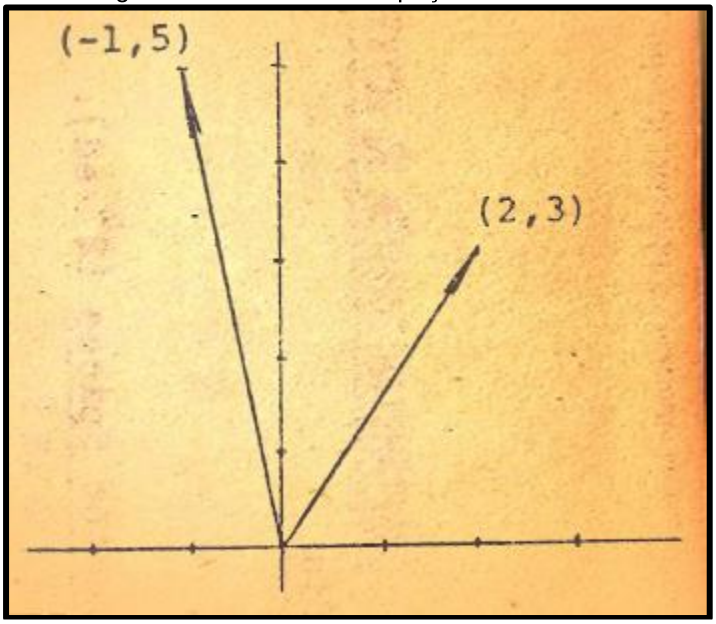
**Representação em linguagem natural:** Observada na definição de base de um espaço vetorial 'Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é dito uma base para v se é linearmente independente e gera v (LA PENHA & CARAKUSHANSKY, 1974, p. 236). E ainda na definição de dimensão 'A dimensão de v é o número de vetores de uma base de v' (LA PENHA & CARAKUSHANSKY, 1974, p. 238).

**Representação algébrica:**

> Algebricamente, este conjunto é linearmente independente, já que $c_1[2,3] + c_2[-1,5] = [0,0] \rightarrow \begin{cases} 2c1 - c2 = 0 \\ 3\alpha1 + 5\alpha2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = c_2 = 0$ e gera $R^2$, pois um vetor arbitrário V = [x, y] pode ser escrito como uma combinação linear de [2,3] e [-1,5]:
> $[x,y] = k_1 [2,3] + k_2 [-1,5]$
> $[x,y] = [2k_1 – k_2, 3k_1 + 5k_2]$
> $\rightarrow \begin{cases} 2k1 - k2 = x \\ 3k1 + 5k2 = y \end{cases}$
> $k_1 = \frac{x+k2}{2} \rightarrow k_1 = \frac{5x+y}{13}$
> $3k_1 + 5k_2 = y \rightarrow \frac{3x + 3k2}{2} + 5k_2 = y \rightarrow k_2 = \frac{2y-3x}{13}$
> Logo,
> $[x,y] = \frac{5x+y}{13} [2,3] + \frac{2y-3x}{13} [-1,5]$ (LA PENHA & CARAKUSHANSKY, 1974, p. 238)

**Representação geométrica:** Os autores explicam, geometricamente, o motivo de dois determinados vetores serem uma base de $R^2$, essa situação é representada na figura 18 e explicação de La Penha e Mina segue a frente.

Figura 18: Base de um espaço vetorial no R²




Fonte: LA PENHA & CARAKUSHANSKY, 1974, p. 238)

> O conjunto {[2,3], [1,5]} é uma base para R². Geometricamente este conjunto é linearmente já que os vetores não são colineares e, gera o R², pois qualquer vetor do plano pode ser escrito como combinação linear desses vetores. Algebricamente, este conjunto é linearmente independente, já que
> $c_1[2,3] + c_2[-1,5] = [0,0] \rightarrow \begin{cases} 2c1 - c2 = 0 \\ 3\alpha1 + 5\alpha2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = c_2 = 0$ e gera R², pois um vetor arbitrário V = [x, y] pode ser escrito como uma combinação linear de [2,3] e [-1,5]:
> $[x,y] = k_1\,[2,3] + k_2\,[-1,5]$
> $[x,y] = [2k_1 - k_2,\ 3k_1 + 5k_2]$
> $\rightarrow \begin{cases} 2k1 - k2 = x \\ 3k1 + 5k2 = y \end{cases}$
> $k_1 = \frac{x+k2}{2} \rightarrow k_1 = \frac{5x+y}{13}$
> $3k_1 + 5k_2 = y \rightarrow \frac{3x + 3k2}{2} + 5k_2 = y \rightarrow k_2 = \frac{2y-3x}{13}$
> Logo,
> $[x,y] = \frac{5x+y}{13}\,[2,3] + \frac{2y-3x}{13}\,[-1,5]$ (LA PENHA & CARAKUSHANSKY, 1974, p. 238).

Diante dessa explicação geométrica a respeito de um conjunto de vetores que são uma base de um espaço vetorial, é possível observar pela primeira vez nas análises dos livros a realização verdadeiramente de uma conversão semiótica que parte da representação geométrica, pertencente ao sistema semiótico figural, para a representação algébrica, pertencente ao sistema semiótico simbólico.

Tal fato, segundo a TRRS de Duval, possibilita que os alunos identifiquem as propriedades desse mesmo objeto matemático, salientadas em cada umas das representações semióticas.

Em síntese, foi observado que o livro AL1 possui uma linguagem clara e objetiva, no qual os autores partem de exemplos numéricos ou ideias intuitivas para a formalização desses conceitos com rigor matemático, além disso, verificou-se uma interrelação entre os conhecimentos trabalhados de modo que uma definição complemente a outra.

Sobre as representações foi identificado pelo menos três tipos de representações relacionadas aos tópicos de (in)dependência linear, geradores e base e dimensão num espaço vetorial no livro AL1, sejam elas: representação em linguagem natural, algébrica e geométrica. Além disso, foi identificado a realização de uma conversão de registro da representação geométrica para a algébrica no tópico de base.

## 5.2. ANÁLISE DO LIVRO AL2

### 5.2.1. (In)dependência linear

*(i) Introdução do conteúdo*

No livro AL2, os autores introduzem os tópicos em questão, com base num novo conceito denominado suporte de uma família, assim definido:

> Sejam (Vi)i ϵ I uma família de vetores de V, chamamos <u>suporte</u> da família (Vi) i ϵ I o subconjunto J do conjunto de índices I, caracterizado por J = {i ϵ I | V1 ≠ 0}, ou seja, o suporte de uma família de vetores caracteriza os elementos distintos de zero dessa família (MEDEIROS; LA PENHA; MENZALA, 1975 p. 18)

A partir desse conceito, são definidos alguns tópicos constantes no livro AL1, ou seja, os autores utilizam o conceito de família como base explicativa para as outras definições, a exemplo da definição de combinação linear:

> Um vetor u ϵ V é chamado de <u>(soma da) combinação linear</u> de uma família (ui) i ϵ I de vetores de V, se existe uma família ($ʎ^i$) i ϵ I de escalares de K, possuindo suporte finito J tal que: u = $\sum_I$ ($ʎ^i$ . ui) (MEDEIROS; LA PENHA; MENZALA, 1975, p. 19).

*(ii) Definição do objeto matemático*

Os autores do livro AL2 definem dependência linear da seguinte forma:

> Seja (ui) i ϵ I uma dada família de vetores, o conjunto de elementos dessa família, {ui} é dito linearmente dependente, se o vetor zero da combinação

> linear não trivial de uma subfamília (ui)i ϵ I onde h está contido em I e quaisquer que sejam os índices distintos j, k ϵ H, uj ≠ uk. Assim, se {ui | i ϵ I} é linearmente dependente, existe ($\lambda^i$) i ϵ H do suporte finito e tal que: $\sum_H$ ($\lambda^i$ . ui) = 0 e o suporte de ($\lambda^i$) i ϵ H não é vazio (MEDEIROS; LA PENHA; MENZALA, 1975, p. 20).

A definição de independência linear também é apresentada de maneira análoga, a partir do conceito de família:

> Uma família de vetores (ui) i ϵ I é dita livre, ou é um sistema livre se não for ligada, i. e., (ui) i ϵ I é livre quando u = $\sum_I$ $\lambda^i$ . ui = 0. Implica em que ($\lambda^i$) i ϵ I possua suporte vazia ($\lambda^i$ = 0, ∀ i ϵ I. É claro que toda subfamília de uma família livre de vetores é também livre. Se (ui) i ϵ I é uma família livre, então para qualquer par de índices distintos j, k ϵ I tem-se uj ≠ uk e a aplicação I → V: i → vi é injetora. Os vetores de um sistema livre são ditos linearmente independente (MEDEIROS; LA PENHA; MENZALA, 1975, p. 22).

É possível perceber que para definir dependência linear os autores a apresentam de forma direta a partir de combinação linear, embora também esteja diluído a ideia de família. Da mesma forma é conceituada independência linear, no entanto juntamente com a ideia de vetores livres.

*(iii) Utilização de mais de uma representação do objeto matemático*

Identificamos apenas uma representação de (in)dependência linear que envolve a linguagem algébrica e linguagem natural, como visto nas definições apresentadas na categoria anterior, entretanto não identificamos nenhuma representação geométrica do referido tópico.

Acredito que essa representação geométrica não foi apresentada no livro AL2, embora esteja nos livros AL1 e AL3, devido ao fato de ser um resumo das principais definições da Álgebra linear, o qual La Penha justifica no tópico ‘ao leitor’ presente na quarta seção.

5.2.2. Geradores

*(i) Introdução do conteúdo*

Como citado anteriormente, o conceito de família é base introdutória para a definição de alguns tópicos presentes nos livros AL2, dentre eles, os Geradores, e por isso a introdução de geradores fica caracterizado como o conceito de família.

*(ii) Definição do objeto matemático*

Vetores geradores de um espaço vetorial é definido no livro AL2 com base no conceito de família da seguinte forma:

> Um subconjunto G contido em V é denominado um <u>sistema de geradores</u> de V(k) se todo vetor v ϵ V é uma combinação linear de (pelo menos uma) família de vetores de G. O próprio conjunto V é evidentemente um sistema de geradores. Se G é um sistema de geradores de V(k) e todo o vetor de G é uma combinação linear de vetores de um subconjunto G' contido em G; segue-se então que G' é também um sistema de geradores e V(k) (MEDEIROS; LA PENHA; MENZALA, 1975, p. 22).

Pode ser observado mais uma vez que os autores, embora utilizam de conceitos complementares como de família aos tópicos em questão, não abandonam o formalismo da definição de geradores.

*(iii) Uso de mais de uma representação do objeto matemático*

Em relação as representações de geradores no livro AL2, foi identificado apenas a representação algébrica apresentada anteriormente na definição. Novamente, acredito que tais representações foram sacrificadas nesse livro pois trata-se de um resumo das principais definições, conforme justificado por Guilherme de La Penha.

### 5.2.3. Base e Dimensão

*(i) Introdução do conteúdo*

No livro AL2, La Penha não faz uma introdução ao conteúdo de base de um espaço vetorial, bem como também não a faz ao tópico de dimensão. Entendo que isso ocorre devido ao fato de esse livro ser apenas um resumo das principais definições da álgebra linear, pois há uma espécie de introdução dedutiva nos livros AL1 a AL3.

*(ii) Definição do objeto matemático*

La Penha define base de espaço vetorial da seguinte forma:

> Seja G = {$u_i$ | i ϵ r} um sistema finito de geradores de V(K) e seja ($u_j$), j ϵ n uma sequência em G cujos vetores são linearmente independentes. Então existe uma base de V(K) que contém vetores $u_j$ (j = 1, ..., n) e está contida em G (MEDEIROS; LA PENHA; MENZALA, 1975, p. 24).

Sobre a definição de dimensão de um espaço vetorial, ela é assim definida: ‘Definimos a dimensão de um espaço vetorial não trivial gerado finitamente como sendo o número de vetores de qualquer base desse espaço e dizemos que um tal espaço é de dimensão finita (MEDEIROS, LA PENHA & MENZALA, 1975, p. 27).

É possível perceber que as definições de base e dimensão de um espaço vetorial no livro AL2 são apresentadas de maneira objetiva e clara. É importante ressaltar que a definição de base no livro AL2 é apresentada de forma contrária ao comumente apresentado nos outros livros, visto que se parte de geradores e vetores linearmente independente para afirmar que existe uma base, entretanto, não sabemos se por estilo do autor ou com algum objetivo.

*(iii) Uso de mais de uma representação do objeto matemático*

No livro AL2 não identificamos o uso de mais de uma representação de base e dimensão. Acreditamos que isso ocorre em razão do mesmo motivo de não haver introduções à esses tópicos, pois nos livros AL1 e AL2 essas representações algébricas e geométricas são marcantes.

A partir das análises do livro AL2, percebemos que os tópicos de base e dimensão de um espaço vetorial não são precedidos de uma introdução ou algo parecido, pois as definições são apresentadas de maneira sintética e objetiva. É interessante ressaltar que a definição de base de um espaço vetorial é apresentada de maneira contrária aos livros AL1 e AL3, entretanto não sabemos se por conveniência do autor ou se por um objetivo específico deste.

Além disso, não foi identificado o uso de outras representações, que não a algébrica, dos objetos matemáticos em questão, visto que é um resumo das principais definições da álgebra linear, o que justifica a ausência de certas representações. De maneira sucinta, o livro AL2 é um livro compacto com uma linguagem mais formal e axiomática, apresenta poucos exemplo e exercícios, e as definições presente neste estão embasadas em outras ideias como de família e vetores livres.

## 5.3. ANÁLISE DO LIVRO AL3

### 5.3.1. (In)dependência linear

É importante ressaltar antes de apresentar as análises do livro AL3 que a referida obra incorpora o livro AL1, uma vez que se trata de um livro baseado nos livros anteriores publicados por La Penha, desse modo, as análises apresentadas a seguir têm algumas características em comum com as análises do primeiro livro.

*(i) Introdução do conteúdo*

Da mesma forma que no livro AL1, La Penha e Mina no livro AL3 apresentam uma situação numérica, e a partir dessa ideia é que são definidos tópicos posteriores, dentre eles (in)dependência linear, geradores, base e dimensão de uma espaço vetorial.

> Consideremos o vetor $v_1$ = [8, -9, 2] de $R^3$. É fácil ver que este vetor pode ser escrito como 8[1,0,0] + (-9) [1,0,1] + 2[0,0,1]. Seja agora [$x_1$, $x_2$, $x_3$] um vetor de $R^3$, temos que [$x_1$, $x_2$, $x_3$] = $x_1$[1,0,0] + $x_2$[0,1,0] + $x_3$[0,0,1]. Vemos assim, que os vetores de $R^3$, podem ser expressos em termos de três vetores fixos [1,0,0]; [0,1,0] e [0,0,1]. Objetivamos estudar agora o processo de construção de vetores e subespaços (LA PENHA & CARAKUSHANSKY, 1977, p. 154 - 155).

É possível observar a utilização dessa noção introdutória para a definição de combinação linear por exemplo:

> No primeiro exemplo dado acima, como o vetor [8,-9,2] é igual a 8[1,0,0] + (-9)[0,1,0] + 2[0,0,1], pode-se afirmar que o vetor [8,-9,2] é uma combinação linear dos vetores [1,0,0], [0,1,0] e [0,0,1], os coeficientes escalares correspondentes a estes vetores são respectivamente 8, -9 e 2 (LA PENHA & CARAKUSHANSKY, 1977, p. 155).

O fato de os livros AL1 e AL3 ter 3 anos de diferença e ainda possuir as mesmas metodologias da concretização das definições a partir de exemplos numéricos, demonstra que essa abordagem utilizada por La Penha é algo recorrente em seus livros e que pode ser considerada uma das características marcantes dentre suas contribuições ao estudo dos Espaços Vetoriais.

*(ii) Definição do Objeto Matemático*

Os autores assim definem dependência linear no Livro AL3:

> Um conjunto {V1, V2, ..., Vk} (com K > 1) de vetores de um espaço vetorial v é chamado linearmente dependente (abreviamente LD) se (pelo menos) algum dos vetores vi é combinação linear dos demais vetores desse conjunto, isto é, se para algum Vi, podemos achar escalares convenientes designados por $\alpha$j, tais que Vi = $\alpha$1V1 + $\alpha$2V2 + ... + $\alpha$i-1Vi-1 + $\alpha$j+1Vi+1 + ... + $\alpha$kVk (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1977, p. 155).

Sobre a definição de independência linear, da mesma forma vista no livro AL1, ela acontece a partir da redução de vetores geradores linearmente dependentes pelo método da exaustão até serem linearmente independentes, e assim apresenta-se a definição formal: ‘Um conjunto de vetores {V1, V2, ..., Vn} é linearmente independente se e somente se a afirmação de que $\alpha1V1 + \alpha2V2 + ... + \alpha nVn = 0$ implica no fato de todos os ai’s (i = 1, 2, ..., n) serem iguais a zero’ (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1977, p. 162).

Semelhante ao Livro AL1, percebe-se que o autor, embora trabalhe com exemplos numéricos visando uma concretização das ideias, não abandona a definição formal de (in) dependência linear e, em especial nesse livro, nota-se uma clareza ainda maior em relação ao primeiro livro, pois há um detalhamento mais completo e uma melhor organização.

*(iii) Utilização de mais de uma representação do objeto matemático*

Análogo ao livro AL1, em relação a utilização de mais de uma representação do objeto matemático, percebemos pelo menos três representações do mesmo objeto:

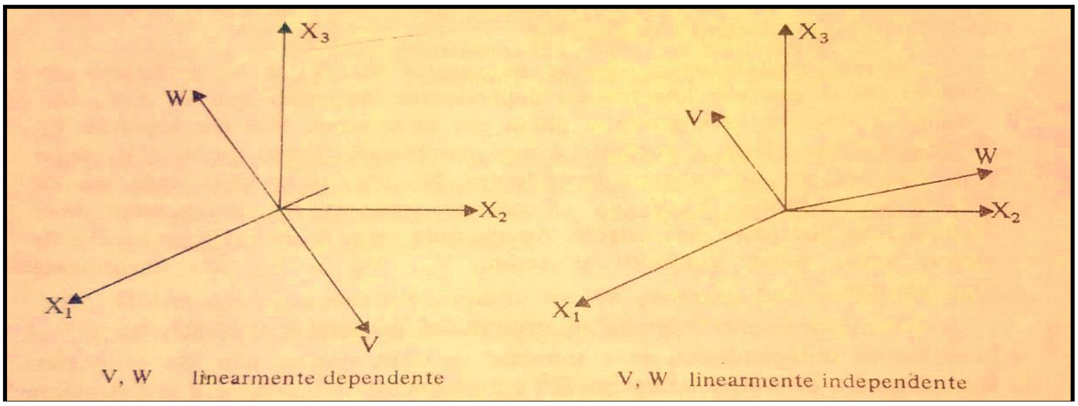
**Representação em linguagem natural:** ‘É evidente que V e W são linearmente dependente se e somente se um é múltiplo escalar do outro (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1977, p. 162).

**Representação algébrica:** ‘$\alpha1V1 + \alpha2V2 + ... + \alpha nVn = 0 \rightarrow \alpha1$’s $\neq 0$’

**Representação geométrica:** Os autores afirmam que dois vetores são linearmente dependentes se são colineares, caso contrário são linearmente independentes, como é possível observar na figura 19.

Observa-se que, da mesma forma que no livro AL1, os autores utilizam as outras representações, além da algébrica, no intuito de que o aluno tenho conhecimento de objeto como um todo, visto que se apropria de determinadas característica desse objeto em cada representação, e não de modo a facilitar o entendimento desses conceitos pelos alunos.

FIGURA 19: Vetores linearmente dependentes e independentes




Fonte: La Penha & Carakushansky (1977, p. 163)

### 5.3.2. Geradores

*(i) Introdução do conteúdo*

Como discutido anteriormente, os autores do livro AL3 utilizam uma situação numérica, de modo a dar suporte as definições posteriores, dentre as quais a definição de geradores.

> No segundo exemplo, aparece uma propriedade bastante forte: qualquer vetor $[x_1, x_2, x_3] \in R^3$ é combinação linear do conjunto de vetores {[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]}. Neste caso, os escalares correspondentes (a esses vetores) são exatamente os componentes $x_1$, $x_2$ e $x_3$, isto é, $[x_1, x_2, x_3] = x_1[1,0,0] + x_2[1,0,0] + x_3[0,0,1]$. Quando se tem um conjunto de vetores que 'criam' todos os vetores do espaço vetorial considerado, diz-se que este conjunto GERA o espaço (LA PENHA & CARAKUSHANSKY, 1977, p. 155)

Novamente, semelhante ao livro AL1, os autores utilizam a analogia de vetores que 'criam' o espaço vetorial a partir de combinação linear, para assim definir vetores geradores de um espaço vetorial.

*(ii) Definição do objeto matemático*

Geradores são assim definidos no livro AL3:

> Seja $\{V_1, V_2, ..., V_k\}$ um conjunto finito não vazio de vetores de um espaço vetorial v. S qualquer vetor $V \in v$ pode ser representado como uma combinação linear dos vetores $\{V_1, V_2, ..., V_k\}$ (isto é, se $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... + \alpha_k V_k$, para certos escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$) então o conjunto de vetores $\{V_1, V_2, ..., V_k\}$ gera o espaço v ou, é um conjunto de geradores de v (LA PENHA & CARAKUSHANSKY, 1977, p. 155).

Assim como percebido nos livros anteriores, La Penha, embora use ideias numéricas de modo a complementar o conhecimento do objeto, não abandona o rigor na formalização dos conceitos.

*(iii) Utilização de mais de uma representação do objeto matemático*

A respeito da utilização de mais de uma representação, da mesma forma que no livro AL1, identificamos as mesmas representações.

**Representação em linguagem natural:** 'Quando se tem um conjunto de vetores que 'criam' todos os vetores do espaço vetorial considerado, diz-se que este conjunto GERA o espaço' (LA PENHA & CARAKUSHANSKY, 1977, p. 155).

**Representação geométrica:** Os autores apresentam o significado geométrico do processo de geradores, a respeito de determinada situação. Tal situação é a mesma apresentada na análise de geradores da terceira categoria do livro AL1, e por isso não apresento novamente.

Diante das análises do tópico geradores do livro AL3, é possível observar que os autores, da mesma forma que no livro AL1, partem de uma situação numérica a fim de dar suporte à definição formal, a partir de vetores 'criadores' de um espaço vetorial.

Em relação as representações, é possível identificar que são as mesmas encontras no referente tópico no livro AL1, que são as representações em linguagem natural e representação geométrica, que possibilitam um maior entendimento a respeito do objeto matemática segundo a TRRS.

### 5.3.3. Base e Dimensão

*(i) Introdução do conteúdo*

No livro AL3, o tópico base é introduzido pelos autores a partir da situação descrita a seguir:

> Consideremos em $R^n$, o conjunto de vetores $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ onde Ei é o vetor que tem zeros em todas as componentes exceto na i-ésima, que é 1.
>
> $$E_i = [0, ..., 0, 1, 0, ..., 0]$$
>
> Observamos primeiro que estes vetores são linearmente independentes. Pois supondo que
>
> $$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + ... + \alpha_n E_n = 0$$
>
> Temos que
>
> $$\alpha_1 [1, 0, ..., 0] + \alpha_2 [0, 1, ..., 0] + ... + \alpha_n [0, 0, ..., 1] = 0$$
>
> Ou,
>
> $$[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n] = [0, 0, ..., 0]$$
>
> Assim,
>
> $$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$
>
> Os vetores $E_1, E_2, ..., E_n$ também geram $R^n$, pois se $V \in R^n$, $V = [x_1, x_2, ..., x_n] = x_1 [1, 0, ..., 0] + x_2 [0, 1, ..., 0] + ... + x_n [0, 0, ..., 1] = x_1 E_1 + x_2 E_2 + ... + x_n E_n$
> Como qualquer vetor V pode ser escrito como combinação linear de $E_1, E_2, ..., E_n$ vemos que $E_1, E_2, ...,$ En geram $R^n$. Conjuntos deste tipo, que são

> linearmente independentes e que geram o espaço ao qual pertencem são muito importantes na Álgebra Linear (CARAKUSHANSKY & LA PENHA, 1977, p. 169).

É possível perceber que, da mesma forma que no livro AL1, utiliza-se uma situação contextualizada matematicamente, na qual informa-se implicitamente as condições necessárias para que um conjunto de vetores possa ser uma base de um determinado espaço vetorial. Entretanto, não há uma introdução à dimensão de um espaço vetorial, pois nesse livro o tópico dimensão está contido no tópico base.

*(ii) Definição do objeto matemático*

O autor assim define base de um espaço vetorial: 'Um conjunto de vetores B = {$V_1$, $V_2$, ...., Vn} é dito uma base para v se B é linearmente independente e B gera v' (CARAKUSHANSKY & LA PENHA, 1977, p. 169).

Em relação a dimensão de uma base de um espaço vetorial, La Penha apresenta a definição de seguinte forma:

> Seja v ≠ {0} um espaço vetorial. Então a dimensão de v é o número de vetores de uma base de v. No caso em que v = {0} dizemos que v tem dimensão zero. Quando o número de vetores de uma base de v é finito diz-se que v é um espaço vetorial de dimensão finita (CARAKUSHANSKY & LA PENHA, 1977, p. 172).

Percebemos que no livro AL3, as definições de base e dimensão são apresentadas de maneira direta e objetiva. Em relação à base de um espaço vetorial, é fácil ver que o entendimento da introdução da base de um espaço vetorial facilita ainda mais a compreensão da definição deste objeto.

*(iii) Utilização de mais de uma representação do objeto matemático*

No que diz respeito as representações, foram identificadas duas representações de base e dimensão.

**Representação em linguagem natural:** 'Um conjunto de vetores B é dito uma base para v se B é linearmente independente e B gera v' (CARAKUSHANSKY & LA PENHA, 1969, p. 172), e ainda 'Dimensão de v é o número de vetores de v'.

**Representação algébrica:**

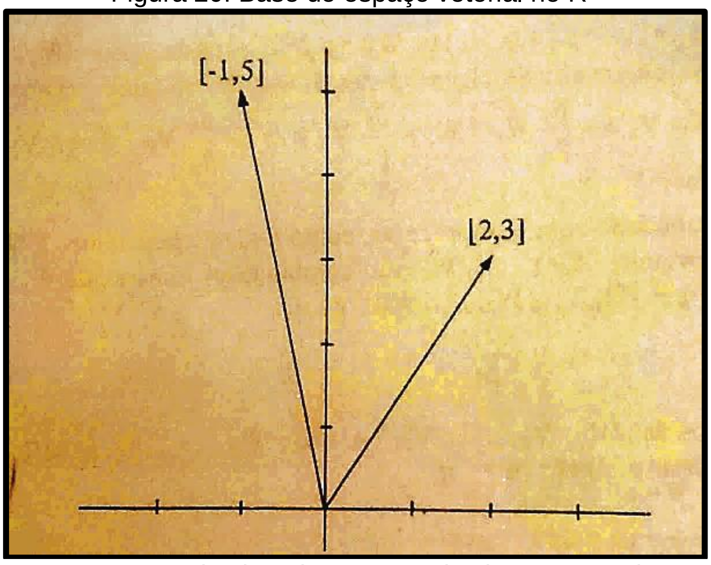
> Algebricamente, este conjunto é linearmente independente, já que

> $\alpha_1[2,3] + \alpha_2[-1,5] = [0,0] \rightarrow \begin{cases} 2\alpha 1 - \alpha 2 = 0 \\ 2\alpha 1 + 5\alpha 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e gera $R^2$, pois um vetor arbitrário V = [x, y] pode ser escrito como uma combinação linear de [2,3] e [-1,5]:
>
> $[x,y] = k_1 [2,3] + k_2 [-1,5] = [2k_1 - k_2, 3k_1 + 5k_2] \rightarrow \begin{cases} 2k1 - k2 = x \\ 3k1 + 5k2 = y \end{cases}$
>
> $k_1 = \frac{x+k2}{2} \rightarrow k_1 = \frac{5x+y}{13}$
>
> $3k_1 + 5k_2 = y \rightarrow \frac{3x + 3k2}{2} + 5k_2 = y \rightarrow k_2 = \frac{2y-3x}{13}$
>
> Logo,
>
> $[x,y] = \frac{5x+y}{13}[2,3] + \frac{2y-3x}{13}[-1,5]$ (CARAKUSHANSKY & LA PENHA, 1977, p. 170).

**Representação geométrica:** No primeiro exemplo, após a definição de base, os autores tratam de um conjunto de vetores que são base e mostram a razão de ser uma base geometricamente conforma a figura 20.

> O conjunto {(2,3), (-1,5)} é uma base para $R^2$. Geometricamente, este conjunto é linearmente independente, já que os vetores não são colineares e, gera $R^2$, pois qualquer vetor do plano pode ser escrito como combinação linear desses vetores. Algebricamente, este conjunto é linearmente independente, já que
>
> $\alpha_1[2,3] + \alpha_2[-1,5] = [0,0] \rightarrow \begin{cases} 2\alpha 1 - \alpha 2 = 0 \\ 2\alpha 1 + 5\alpha 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e gera $R^2$, pois um vetor arbitrário V = [x, y] pode ser escrito como uma combinação linear de [2,3] e [-1,5]:
>
> $[x,y] = k_1 [2,3] + k_2 [-1,5] = [2k_1 - k_2, 3k_1 + 5k_2] \rightarrow \begin{cases} 2k1 - k2 = x \\ 3k1 + 5k2 = y \end{cases}$
>
> $k_1 = \frac{x+k2}{2} \rightarrow k_1 = \frac{5x+y}{13}$
>
> $3k_1 + 5k_2 = y \rightarrow \frac{3x + 3k2}{2} + 5k_2 = y \rightarrow k_2 = \frac{2y-3x}{13}$
>
> Logo,
>
> $[x,y] = \frac{5x+y}{13}[2,3] + \frac{2y-3x}{13}[-1,5]$ (CARAKUSHANSKY & LA PENHA, 1977, p. 170).

Figura 20: Base do espaço vetorial no $R^2$




Fonte: Carakushansky & La Penha (1969, p. 170)

É possível perceber que da mesma forma que no livro AL1, Carakushansky e La Penha realizam uma conversão da representação geométrica, pertencente ao sistema semiótico figural, para a representação algébrica, dentro do sistema semiótico simbólico. Esse fato, segundo a TRRS, possibilita uma maior compreensão do objeto matemático pelo aluno, uma vez que em cada representação são ressaltadas características deste mesmo objeto.

No que diz respeito ao usa das representações no tópico de dimensão de um espaço vetorial, La Penha e Carakushansky realizam um tratamento dentro do registro algébrico:

> Consideremos o sistema de equações homogêneas
> $$\begin{cases} \mathrm{x1} + 2\mathrm{x2} - \mathrm{x3} + \mathrm{x4} = 0 \\ \mathrm{x1} - \mathrm{x2} + 3\mathrm{x3} + 2\mathrm{x4} = 0 \end{cases}$$
> Escrevendo esse sistema em notação matricial, temos que
> $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
> O conjunto das soluções {[x1, x2, x3, x4]} desse sistema forma um subespaço de $R^4$. Vamos achar uma base para este subespaço e calcular a dimensão. Utilizaremos o método de eliminação (...) (CARAKUSHANSKY & LA PENHA, 1977, p. 173).

No que diz respeito ao livro AL3, observamos que há uma introdução ao estudo da base de um espaço vetorial e esta contribui significativamente à compreensão da definição, entretanto, não há uma introdução à dimensão de espaço vetorial, uma vez que ele está dentro do tópico base. A definição de base e dimensão é apresentada de maneira sucinta e objetiva.

Sobre o uso de mais de uma representação do objeto matemático, foi identificado as representações em linguagem natural, representação algébrica e representação geométrica, bem como a realização pelos autores da conversão da representação geométrica para a algébrica, fato esse que possibilita uma maior compreensão do objeto matemático pelo estudante.

De maneira geral, percebemos que o livro AL3 é mais completo com relação ao livros anteriores, no qual são apresentadas definições com um maior detalhamento, e exemplos mais concretos, além disso, os autores permanecem com as mesmas ideias dos livros anteriores, o que demonstra uma linearidade no estudo da Álgebra Linear, principalmente no que diz respeito ao uso de mais de uma representação do objeto matemático de forma que o aluno compreenda por completo o objeto em estudo, e ainda é notório a interrelação entre os conceitos trabalhados. Assim, esse livro seria próprio para os iniciantes em Álgebra Linear, fato confirmado pelo título do livro.

## 5.4. APONTAMENTOS A RESPEITO DAS ANÁLISES

Diante das análises realizadas dos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha, com base nas categorias pré-estabelecidas, é possível traçar algumas considerações a respeito do observado.

Em relação ao tópico de (in)dependência linear, foi observado que na introdução desse conteúdo, La Penha e seus colaboradores partem de situações numéricas como a de combinação linear ou de outros conceitos matemático como suporte de uma família e vetores livres, a fim de que essas ideias possibilitem uma maior compreensão das definições seguintes.

No entanto, embora sejam usadas ideias intuitivas, Guilherme de La Penha e seus parceiros de autoria não abandonam o rigor matemático nas definições, e sim mostram a importância do entendimento dessas noções introdutórias na compreensão das definições.

No que diz respeito ao uso das representações de (in)dependência linear, foram identificadas pelo menos três nos livros analisados, sejam elas: representação em linguagem natural, representação algébrica e representação geométrica. Entretanto, no livro AL2 foi identificada apenas a representação algébrica, uma vez que esse livro é um resumo das principais definições de Álgebra Linear.

De maneira geral, a respeito do tópico (in)dependência linear, percebe-se que La Penha e seus colaboradores, tem a preocupação em concretizar as definições em Álgebra Linear a partir de ideias numéricas ou de conceitos complementares, bem como buscam apresentar mais de uma representação de (in)dependência linear. Esse fato, a luz da TRRS, possibilita uma maior compreensão de (in)dependência linear pelos estudantes, pois a cada representação a qual eles têm contato, podem conhecer novas características desse mesmo objeto matemático.

Sobre o tópico geradores, foi observado que para introduzir geradores, La Penha e seus colaboradores utilizam a mesma situação numérica de (in)dependência linear, no entanto realizam uma a analogia à vetores que ‘criam’ um espaço vetorial. No livro AL2, essa introdução é feita a partir da definição de família, uma vez que é a partir desse conceito que são definidos tópicos posteriores, dentre os quais, geradores.

Em relação a definição de geradores, é possível perceber que, como afirmado anteriormente, embora os autores utilizem ideias numéricas para introduzir geradores, não há o abandono do rigor matemático na definição desse objeto matemático. No que concerne as representações de geradores, foram identificas as representações em linguagem natural e representações geométricas, embora no livro AL2 tenha sido apresentada apenas a representação algébrica, justificada por se tratar de um resumo das principais definições de Álgebra Linear.

Sobre o conceito de base e dimensão num espaço vetorial, em relação a introdução do referido conteúdo, é possível observar que La Penha e seus colaboradores introduzem o tópico base a partir de uma ideia intuitiva, na qual são informadas implicitamente as condições necessárias para que um conjunto de vetores seja uma base. Não foi identificado uma introdução à dimensão, pois este tópico está contido no conteúdo de base de um espaço vetorial.

No que se refere as definições de base e dimensão, novamente percebe-se que tais tópicos são definidos de maneira direta com todo o rigor matemático necessário. Em relação as representações, os autores dos livros apresentam as representações em linguagem natural, representações algébricas e representações geométricas, nos quais são ressaltados elementos característicos dos objetos de estudo em questão.

Além disso, é importante ressaltar que no tópico base e dimensão é observável verdadeiramente a realização do processo de conversão da representação geométrica, pertencente ao registro semiótico figural, à representação algébrica, pertencente ao registro semiótico simbólico. Essa situação, de acordo com a TRRS, é essencial na aprendizagem matemática, uma vez que permite que o aluno não adote a representação no lugar do objeto matemático, e ainda que ele compreenda o objeto matemático em toda sua essência.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por objetivo responder a seguinte questão: *Quais representações de (in)dependência linear, geradores, base e dimensão num espaço vetorial constam nos livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica?* Sendo assim, apresento nesta seção argumentos que respondem à questão norteadora, e ainda, traço considerações a respeito do andamento da pesquisa.

Diante do exposto, pode ser afirmado que o paraense Guilherme de La Penha enquanto professor e gestor contribuiu significativamente para o avanço da ciência, em especial à matemática. Dentre suas contribuições à matemática, encontram-se diversos livros nas mais diversas áreas, dentre as quais, em Álgebra Linear.

Os livros *Álgebra Linear I e II (1974), Sinopse de Álgebra Linear (1975)* e *Introdução a Álgebra Linear (1977)* foram escritos Guilherme de La Penha em parceria com outros professores, com a intenção de dar um tratamento conceitual moderno a esses livros, ao enfatizar as interações algébricas e geométricas, bem como dos métodos numéricos.

Esse fato somado a minha experiência ao cursar a referida disciplina, conduziu-me a investigar as representações presentes nesses livros, e por isso adotou-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, a qual estuda o papel das representações semióticas na aprendizagem matemática, e ainda utilizou-se como norteadora do trabalho a Teoria da Análise do conteúdo que possibilitou a criação das seguintes categorias de análises: *(i) Introdução do conteúdo; (ii) Definição do objeto matemático* e *(iii) Utilização de mais de uma representação do objeto matemático.*

No que se refere aos livros em questão, é possível perceber que estes, embora tratem do mesmo assunto, tem organizações e metodologias diferenciadas, uma vez que cada livro tem determinado objetivo ou é voltado a um determinado público alvo, fato que tornou as análises ainda mais pertinentes.

Em se tratando das análises dos tópicos (In)dependência linear, geradores, base e dimensão num espaço vetorial, percebemos algumas características em comum, bem como algumas particularidades de cada livrou ou tópico. De modo geral, na introdução dos tópicos em questão, nos três livros é possível perceber que

La Penha juntamente com seus colaboradores, buscam partir de uma situação numérica ou de um determinado conceito com de família e vetores livres, de modo a possibilitar um maior entendimento na definição dos objetos matemáticos pelos alunos, uma vez que para defini-los parte dessas noções introdutórias.

Contudo, mesmo diante dessas noções introdutórias, outra característica dos livros de La Penha é o não abandono do formalismo e do rigor matemático nas definições de (In)dependência linear, geradores, base e dimensão num espaço vetorial. Essa situação corrobora com a ideia de que as noções introdutórias nos livros de La Penha tinham o objetivo de dar suporte a compreensão das definições.

Acerca das representações presentes nos livros de Guilherme de La Penha, a qual fundamenta-se a questão norteadora desse trabalho, foram identificadas pelo menos três, seja elas: representação em linguagem natural, representação algébrica e representação geométrica, nas quais Guilherme de La penha em conjunto com outros autores, realçam as características e especificidades do objeto matemático presentes em cada representação.

Tal circunstância, a luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, são essenciais na realização do processo de conversão, pois possibilita ao aluno 'flexibilidade cognitiva' para transitar nos mais diversos registros de representação semiótico, e por consequência, não adotar mais a representação como o próprio objeto matemático.

Além disso, uma particularidade do tópico base e dimensão num espaço vetorial, repousa no fato de ser o único tópico dentre os analisados, no qual é realizado o processo de conversão da representação geométrica, pertencente ao sistema semiótico figural, à representação algébrica, pertencente ao sistema semiótico simbólico.

Esse fato, de acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, é o ponto chave da aprendizagem matemática, pois é a fase subjacente á compreensão do objeto matemático em sua completude pelo aluno, visto que essa fase só pode ser realizada com autonomia por ele a partir do momento que é possível o reconhecimento do objeto matemático em qualquer representação.

Diante das análises realizadas, é possível compreender a importância de trabalhos dessa natureza ao professor de matemática em formação inicial e continuada, uma vez que possibilita uma visão ampla a respeito do ensino de matemática do ponto de vista cognitivo, e permite a estes a reflexão sobre o fazer docente em sala de aula, nos aspectos inerentes ao uso das representações no ensino de matemática, especialmente em Álgebra Linear.

Além de que, ao analisar os livros do cientista paraense Guilherme de La Penha, é possível conhecer um pouco mais a fundo a visão desse personagem relacionado ao estudo da Álgebra Linear, em especial sobre os tópicos supracitados, assim como sua visão a respeito do fazer docente do professor de matemática no dado período, e dessa forma, contribuir à constituição de acervos documentais ao patrimônio educacional brasileiro.

Em particular, a produção desse trabalho possibilitou-me, enquanto professor de matemática em formação inicial, além das características citadas anteriormente, uma visão mais ampla a respeito da Álgebra Linear e as mais diversas representações dos seus principais conceitos, uma vez que ao cursar a referida disciplina deparei-me apenas com a representação algébrica, e ainda com dificuldades de compreensão conceitual dessas ideias.

Durante a produção deste trabalho, enfrentei diversas dificuldades e limitações, dentre as quais, a compreensão de algumas ideias presentes nos livros de Guilherme de La Penha, principalmente no livro *Sinopse de Álgebra Linear (1975)*, pois como se trata de um livro resultante das aulas com alunos de mestrado, alguns conceitos como famílias de vetores, por exemplo, não são tão fáceis de se entender, principalmente quando não são trabalhados na graduação.

Através da resposta à questão norteadora desse trabalho, se faz pertinente refletir a respeito das representações encontradas nos livros de autoria de Guilherme de La Penha, como por exemplo: Quais representações constantes nos livros do cientista paraense Guilherme de La Penha estão presentes nos livros atuais de Álgebra Linear? Qual o motivo, caso haja, do desaparecimento de algumas representações ou o aparecimento de novas representações nos novos livros de Álgebra Linear em relação aos livros de Guilherme de La Penha? Tais questões são fecundas para pesquisas posteriores.

## 7. REFERÊNCIAS


BARDIN, L. **Análise do Conteúdo.** Tradução: Luíz Antero Reto. 1ª Edição. São Paulo: Edições 70, 2016.

CAMPOS, C. J. G. Método da Análise do Conteúdo: Ferramenta para a análise de dados qualitativos no campo da saúde. **Revista Brasileira de Enfermagem**, Brasília, v. 57, n. 5, p. 611 – 614, set./out. 2004.

CARAKUSHANSKY, M. S; LA PENHA, G. M. S. M. de. **Álgebra Linear I:** 1ª Edição. Rio de Janeiro: UFRJ, 1974.

CARAKUSHANSKY, M. S; LA PENHA, G. M. S. M. de. **Álgebra Linear II:** 1ª Edição. Rio de Janeiro: UFRJ, 1974.

CARDOSO, V. C. **Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear:** Uma discussão acerca das aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais. 210 folhas. Tese de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2014.

CARLOGAMGO, M. C; ROCHA, L. C. Como criar e classificar categorias para fazer análise de conteúdo: uma questão metodológica. **Revista Eletrônica de Ciência Política,** Paraná, v. 7, n. 1, p. 173 – 188, 2016.

CELESTINO, M. R. **Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear:** as pesquisas brasileiras na década de 90. 114 folhas. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2000.

COIMBRA, J. L. **Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem de álgebra linear.** 76 folhas. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. Universidade Federal do Pará. Belém, 2008.

CHAQUIAM, Miguel. **Guilherme de La Penha:** Uma história do seu itinerário intelectual em três dimensões. 284 folhas. Tese de doutorado em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2012.

D’AMORE, B; PINILLA. M. I. F. & IORI, M. **Primeiros elementos da semiótica:** sua presença e sua importância do processo de ensino-aprendizagem da matemática. Tradução: Maria Cristina Bonomi. 1ª edição. São Paulo: Editora livraria da física, 2015.

DIAS, R. M. C; CHAQUIAM, M. **Os livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha**. In: I Congresso Pan-Amazônico de Matemática. Anais do I COPAM. Belém, 2018.

DIAS, R. M. C; CHAQUIAM, M. **(In)dependência Linear nos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha:** um estudo sobre a abordagem metodológica. In: XIII Seminário Nacional de História da Matemática. Anais do XIII SNHM. Fortaleza, 2019. p. 1202–1219.

DIAS, R. M. C; CHAQUIAM, M. **Base e dimensão nos livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha.** In: XIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Anais do XIII ENEM. Cuiabá, 2019.

MENDONÇA, M. S. **Registros de Representação Semiótica, Calculadora e o Geogebra:** Enlaces possíveis na aprendizagem de função exponencial. 250 folhas. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, 2017.

PINHEIRO, T. C. da S. **Análise de Registros de Representação Semiótica em uma atividade matemática com ribeirinhos Muanenses.** 145 folhas. Dissertação de mestrado em Educação. Universidade do Estado do Pará. Belém, 2015.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6ª Edição. São Paulo: Editora Atlas, 2008.

GRANDE, A. L. **O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de álgebra linear.** 208 folhas. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2006.

LA PENHA, G. M. S. M. de. **Introdução à Álgebra Linear**. 1ª Edição. São Paulo: McGraw-Hill, 1977.

MEDEIROS, L. A. da J; LA PENHA, G. M. S; MENZALA, G. P. **Sinopse de Álgebra Linear.** 1ª Edição. Rio de Janeiro: UFRJ, 1975.

SOUZA, M. L. **Dependência e independência linear:** Um estudo a respeito das dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática. 126 folhas. Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2016.

## ANEXO I

# OS LIVROS DE ÁLGEBRA LINEAR DO CIENTISTA PARAENSE GUILHERME DE LA PENHA

*Renan Marcelo da Costa Dias*[1]
*Miguel Chaquiam*[2]

**RESUMO**

Este trabalho tem por objetivo apresentar os livros de Álgebra Linear de autoria do cientista paraense Guilherme Maurício de Souza Marcos de La Penha (1942 - 1996), conhecido apenas como Guilherme de La Penha, bem como a abordagem metodológica presente nesses livros referente aos conteúdos de espaços vetoriais e transformações lineares. Para tal, nos debruçamos sobre os estudos de Chaquiam (2012) que retrata a vida e o legado de Guilherme de La Penha e Mendes (2012) que aborda a importância da pesquisa histórica. Além disso, buscamos nos livros de Álgebra Linear I e II (1974), Sinopse de Álgebra Linear (1975) e Introdução a Álgebra Linear (1976) verificar de que forma os conteúdos supracitados foram abordados nesses livros. As análises nos possibilitaram identificar que as características marcantes nesses livros são a abordagem de conceitos e definições a partir de noções intuitivas, associada preocupação em relacionar os conteúdos dessa disciplina com a matemática da educação básica, e ainda a apresentação de representações do mesmo objeto matemático que, de um modo geral, integram as representações algébricas e geométricas. Os resultados apontam características que demonstram a visão futurista de Guilherme de La Penha, pois ainda hoje essas características podem ser facilmente identificadas no ensino de Álgebra Linear.

**Palavras-chave**: Matemática. História da Matemática. Álgebra Linear. Guilherme de La Penha.

## INTRODUÇÃO

Este trabalho é parte de uma pesquisa que está sendo desenvolvida sob orientação do professor Miguel Chaquiam, e que tem como objetivo analisar os livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha a fim de estabelecer aproximações e distanciamentos relativos aos conteúdos de Álgebra Linear com os livros atuais, assim como, as metodologias utilizadas para a apresentação destes. Entretanto,

[1] Universidade do Estado do Pará – UEPA. E-mail: renanmarcelo1998@gmail.com
[2] Universidade do Estado do Pará – UEPA. E-mail: miguelchaquiam@gmail.com

neste trabalho, nos atentaremos a fase inicial, já conclusa, a apresentação dos livros e as particularidades relacionadas as abordagens metodológicas.

A partir da última década do século XX os estudos em história da Matemática e da Educação Matemática têm se atentado às histórias de vida e formação, apoiando-se na história oral como técnica de pesquisa e na da organização da memória da Matemática e da Educação Matemática. Além disso, Percebe-se que atualmente as histórias da disciplina Matemática, das instituições sociais e educacionais, das (auto) biografias de matemáticos e professores que ensinaram matemática, fazem-se presente nas pesquisas em História da Matemática e História da Educação Matemática e possibilitam o surgimento de importantes contribuições para a formação de professores de Matemática e para a melhoria do ensino da matemática escolar, além de contribuírem para a constituição dos acervos documentais, das memórias e da preservação do patrimônio educacional brasileiro (MENDES, 2012).

Segundos Mendes (2012), a análise de itinerários, sistemas escolares, modelos e métodos de ensino, materiais didáticos, memórias de academias, artigos, teses e livros, são alguns dos fragmentos deixados por cientistas, matemáticos e na formação de professores de Matemática, entre outros personagens que compõem a história da Matemática e da Educação Matemática. Ao considerar esses aspectos como descritores históricos, assim como as expressões orais e escritas desses fatos, é possível pensarmos a importância da compreensão das biografias, histórias de vida, memórias de matemáticos e professores de Matemática, na tentativa de reconstrução da história da Matemática e Educação Matemática e no contexto em que essas histórias foram constituídas ao longo do tempo e espaço.

Nesse sentido, analisar documentos, publicações, falas e reflexões dos próprios sujeitos da pesquisa como princípios de validação dos estudos sobre personagens, produção de conhecimento matemático, instituições científicas e a organização da disciplina Matemática em diferentes épocas e contextos, se constituem em um dos fundamentos que tornam a abordagem histórica uma diretriz norteadora das pesquisas na formação de professores de Matemática e no ensino da Matemática, pois a partir da realização de tais estudos e pesquisas que envolvem a história da Matemática em suas dimensões epistemológicas, sociais e educativas é possível refletir sobre a Matemática atual (MENDES, 2012).

Frente a esse cenário e a conclusão da primeira fase da pesquisa, surgiu o interesse em apresentar os livros de Álgebra Linear de Guilherme de La penha e discutir como se dá as abordagens metodológicas dos conteúdos referentes aos espaços vetoriais e transformações lineares. Para tanto, iniciamos com apresentação de traços biográficos de Guilherme de La Penha, seguido da apresentação de cada um dos livros ora citados, com seus respectivos conteúdos e, por fim, as metodologias quanto as apresentações dos conteúdos relativos aos espaços vetoriais e transformações lineares.

## TRAÇOS BIOGRÁFICOS DE GUILHERME DE LA PENHA

As informações referentes a Guilherme de La Penha foram obtidas na tese doutoral do professor Miguel Chaquiam, defendida em 2012, na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), intitulada "GUILHERME DE LA PENHA: Uma história de seu itinerário intelectual em três dimensões", que teve como foco central a historiografia brasileira da ciência, voltado especificamente para a vida e obra de um matemático-físico da contemporaneidade, onde assegura que La Penha tinha um perfil que pode ser considerado como de um intelectual múltiplo e transdisciplinar, que defendia a possibilidade de se formar um cientista uno e múltiplo, de atitude não linear e que dialoga com todas outras áreas, inspirado nos autores com os quais ele se identificou ao longo da sua formação e atuação profissional, a exemplo: Arquimedes, Leonhard Euler e Cliford Ambrose Truesdell.

Guilherme Maurício Souza Marcos de La Penha nasceu em Belém do Pará, no dia 9 de março do ano de 1942, onde cursou os ciclos primário e secundário, além de um curso técnico de agrimensura. Em 1960 foi aprovado no vestibular da Universidade Federal do Pará (UFPA) para o curso de engenharia Mecânica, sendo pouco depois, transferido para PUC-Rio. Neste mesmo período, La penha aprofundou seus conhecimentos matemáticos no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), onde fez um curso de aperfeiçoamento como bolsista do CNPq.

Em 1965, obteve o primeiro título de mestre em engenharia mecânica pela PUC-Rio, posteriormente em 1966 concluiu outro mestrado em Matemática aplicada e Matemática dos sólidos pela Universidade de Cambridge na Inglaterra como bolsista da CAPES e British Council. Em 1968, obteve o título de Doutor em

Matemática aplicada e Matemática dos sólidos geométricos pela Universidade de Houston, e após isso iniciou outro doutorado na área de Matemática Aplicada. Quando ocupava o cargo de Diretor de Programas Espaciais da Secretária de Assuntos Estratégicos da Agência Espacial Brasileira, em Brasília, veio a falecer em 06 de fevereiro de 1996, tornando-se uma grande perda para a academia, além de ser um admirável gestor e gerador de ciência no Brasil.

Durante sua carreira, La Penha produziu vários artigos científicos em diversas áreas, foi editor e traduziu alguns livros, teve seu nome citado em diversos trabalhos de renome fora do Brasil, foi consultor de editoras, presidente do comitê editorial do CNPq, e membro de muitos outros grupos importantes. Além disso, La Penha também ocupou cargos como, vice-presidente do CNPq e supervisor do observatório nacional do Rio de Janeiro, São Paulo, etc.

Em 1983, La Penha retornou à Belém, e foi nomeado assistente especial do CNPq para a Amazônia, e passou a atuar no Museu Paraense Emílio Goeld (MPEG), restaurando a biblioteca do MPEG e a Biblioteca Pública do Pará. Produziu nesse período vários trabalhos sobre o suíço Leonard Euler, o francês Charles Marie de La Condamine e Joaquim Gomes de Souza. Posteriormente La penha ocupou alguns cargos junto ao governo do Estado (CHAQUIAM, 2013).

Além de suas diversas pesquisas científicas, Guilherme de La Penha também foi co-autor e autor de diversos livros de matemática, dentro os quais de Álgebra Linear. Em 1974, La Penha em colaboração com Mina Seinfeld de Carakushansky, professora e pesquisadora assistente do Programa de Pós-graduação do IM-UFRJ, iniciou com o livro *Álgebra Linear I,* uma sequência de livros de Álgebra Linear procurando relacioná-la com outras ciências.

Posteriormente, em 1975, La Penha Lançou *Sinopse de Álgebra Linear*, segundo ele, essas notas eram literalmente as exposições de Álgebra Linear realizadas junto aos estudantes de mestrado na COPPE e no IM-UFRJ durante o período de 1970 a 1973. Segundo Chaquiam (2012), é observável que o texto é compacto com poucos exemplos e atividades.

Em 1976, La Penha e Carakushansky lançam *Autovalores e Diagonalização*, material que complementa o livro de Introdução a Álgebra Linear e pode servir de iniciação à teoria dos autovalores. Também em 1976, devido a experiências como professor e coordenador de álgebra I e II, e autoria de outros textos sobre álgebra Linear, La Penha lançou o livro *Introdução à Álgebra Linear*, publicado pela McGraw-

Hill em 1976, adotado em diversas universidades brasileiras, além de algumas universidades da América Latina como *'Introducción al álgebra linear'*, traduzido por professores de Bogotá.

Sobre a motivação para a escrita do livro, La Penha afirmou:

> A motivação principal foi o desejo de dar um tratamento conceitual moderno ao assunto, enfatizando-se a interação em Álgebra Linear das influências geométricas e algébricas e, concomitantemente, dando igual atenção a uma abordagem que visa as aplicações e os métodos de cálculo, responsáveis por uma grande parte do interesse e da importância do assunto.
> (LA PENHA, 1976 *apud* CHAQUIAM, 2012, p.157)

Esse comentário nos remete a ideia de que Guilherme de La Penha buscava a modernização na abordagem metodológica de Álgebra Linear em seus livros, e ainda as diversas representações desse conteúdo como geométrica, algébrica e gráfica, além de ressaltar a importância dos métodos numéricos.

A partir dessa situação podemos conjecturar que La Penha tinha uma visão futurista sobre o ensino de álgebra linear, visto que tais objetivos ainda hoje são perseguidos por autores de livros dessa matéria. A seguir, apresentaremos esses livros detalhadamente e as suas abordagens metodológicas identificadas referentes aos espaços vetoriais e transformações lineares.

## OS LIVROS DE ÁLGEBRA LIINEAR

Apresentamos a seguir os livros *Álgebra Linear I e II (1974), Sinopse de Álgebra Linear (1975) e Introdução à Álgebra Linear (1977)*, destacamos os conteúdos relativos aos espaços vetoriais e transformações lineares, bem como, as abordagens metodológicas na apresentação dos conteúdos citados.

### Álgebra Linear I e II (1974)

O livro *Álgebra Linear I* de autoria de Guilherme de La Penha e Mina Seinfeld de Carakushansky, datado de 1974, é composto por quatro capítulos: Noções de conjuntos e vetores, com introdução de espaço vetorial; sistemas de equações lineares e matrizes; espaços vetoriais; transformações lineares e introdução a programação linear.

O livro *Álgebra Linear II*, também de 1974, é composto por determinantes, autovetores, autovalores e espaços com produto interno, além de finalizar com apêndices sobre ângulos de Euler, notações Σ e π e operações algébricas. Na Figura 1 é possível identificar a capa e folha de rosto desses dois livros que se encontram agrupados num único volume.

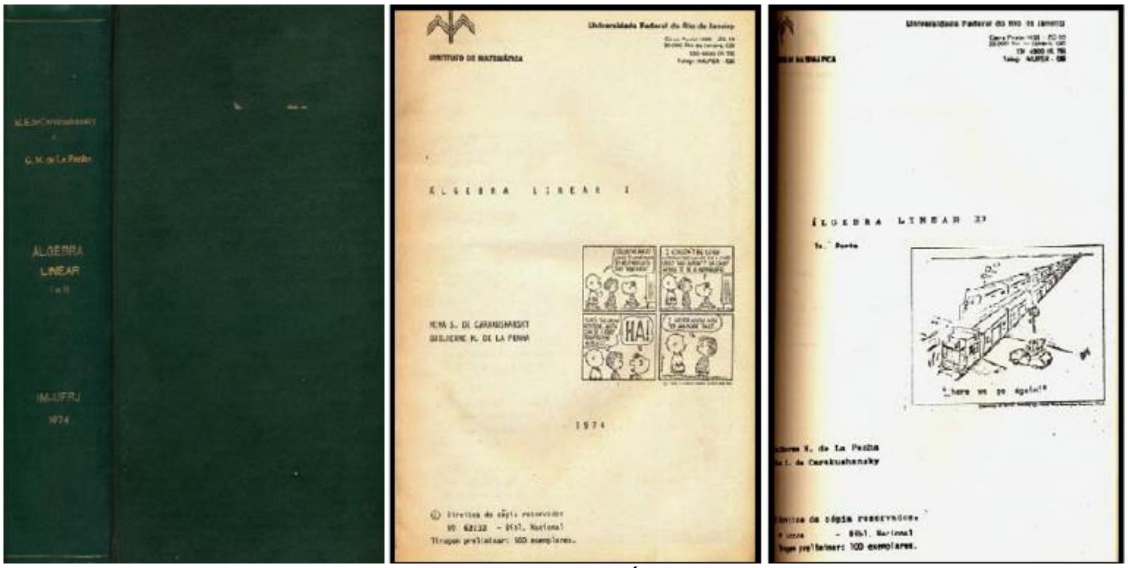


Fig. 1: Capa e folha de rosto do livro Álgebra Linear I e II (1974)
Fonte: Acervo Guilherme de La Penha

Em relação ao conteúdo de espaços vetoriais, constante no Livro *Álgebra Linear I*, tratado no capítulo II, a partir da definição intuitiva de um espaço vetorial, onde os autores consideram que:

> Um espaço vetorial, a grosso modo, é um conjunto cujos elementos são chamados vetores, e para o qual estão definidas as operações de adição e multiplicação escalar, que satisfazem as mesmas regras da adição e multiplicação escalar formuladas no capítulo 0 para segmentos orientados.
> (CARAKUSHANSKY & LA PENHA, 1974, p. 194)

Após a definição formal de espaço vetorial, envereda-se pelas propriedades elementares de espaço vetorial; subespaços vetoriais; dependência linear, estando diluído nessa parte a combinação linear e espaço finitamente gerado; independência linear, base, dimensão e espaços vetoriais isomorfos.

No capítulo seguinte (III), a atenção é dada as transformações lineares. Os tópicos abordados são: definição de transformação linear; espaço imagem de uma transformação linear; núcleo de uma transformação linear; operações com transformação linear; posto de uma Matriz e Espaços Duais.

É possível observar no Livro *Álgebra Linear I*, em relação aos capítulos de espaços vetoriais e transformações lineares, a busca da utilização de uma linguagem clara e objetiva, que parte do intuitivo rumo a formalização. Além disso, é notório a presença de muitos exemplos e exercícios após cada tópico apresentado. No capítulo referente aos espaços vetoriais há cerca de 186 exercícios e no capítulo das transformações lineares há 135.

La Penha tinha a preocupação em apresentar as definições associadas as interpretações geométricas, exemplificado na Figura 2, onde é possível contatar a independência linear de vetores no $R^3$.

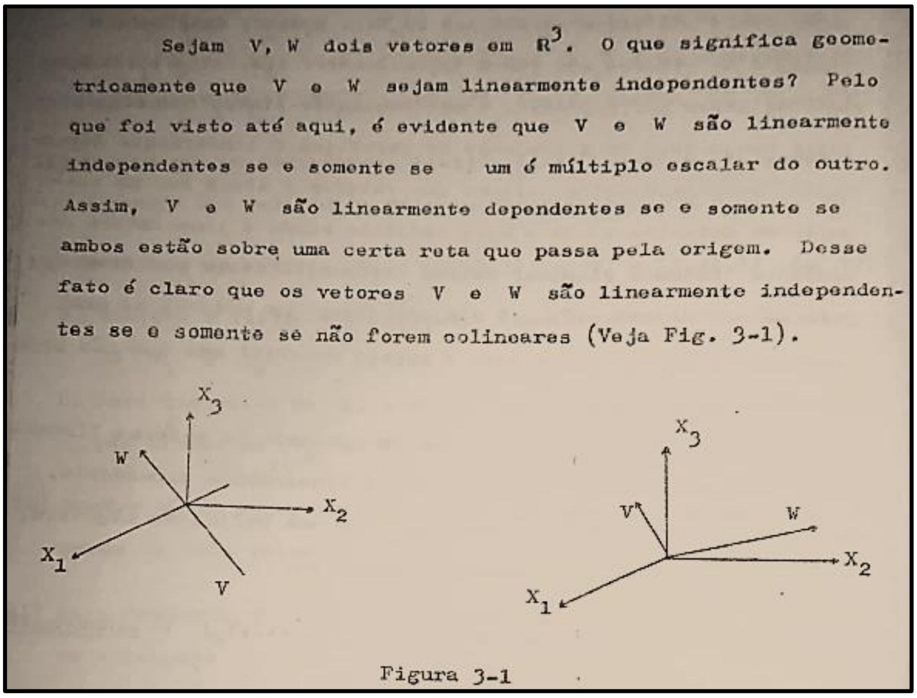

Sejam $V$, $W$ dois vetores em $R^3$. O que significa geometricamente que $V$ e $W$ sejam linearmente independentes? Pelo que foi visto até aqui, é evidente que $V$ e $W$ são linearmente independentes se e somente se um é múltiplo escalar do outro. Assim, $V$ e $W$ são linearmente dependentes se e somente se ambos estão sobre uma certa reta que passa pela origem. Desse fato é claro que os vetores $V$ e $W$ são linearmente independentes se e somente se não forem colineares (Veja Fig. 3-1).



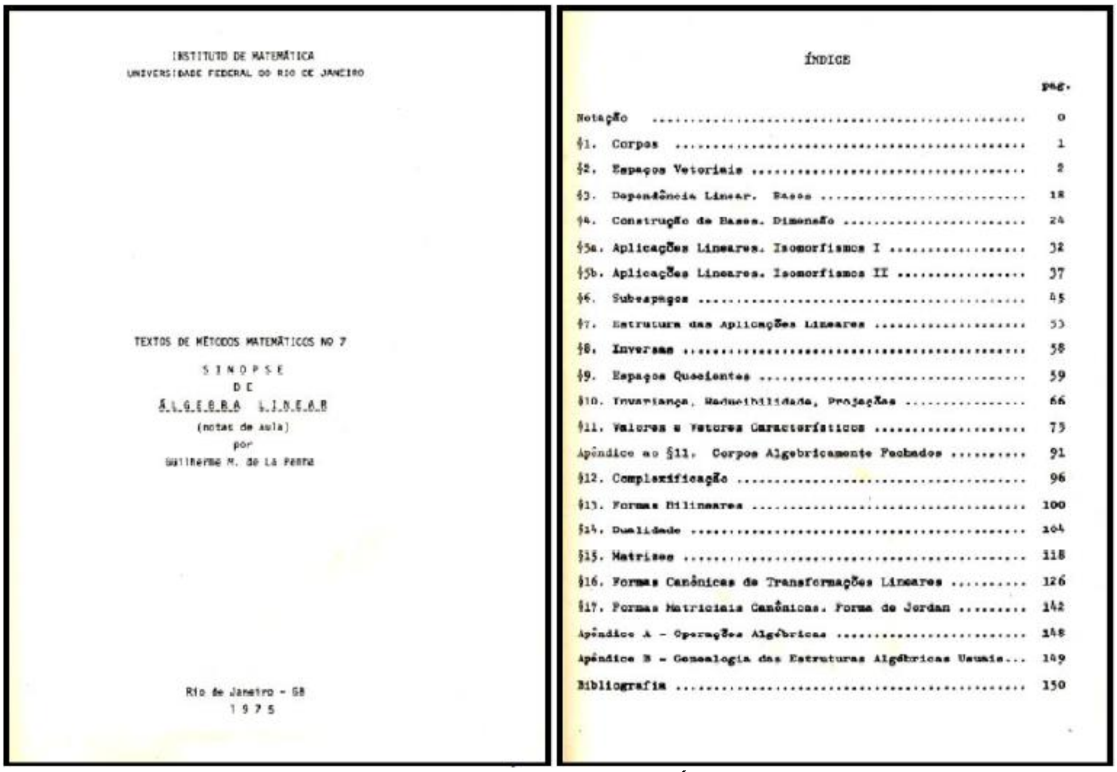
Figura 3-1

Fig. 2: Representação Geométrica de Vetores Linearmente Independentes
Fonte: Carakushansky & La Penha (1974, p. 226)

Observa-se que os autores do livro *Álgebra Linear I e II (1974)* geralmente procuram mostrar mais de uma forma de representação dos conteúdos abordados, comumente esses são apresentadas nas formas algébricas e geométricas, como pode ser verificado na Figura 2 na representação geométrica de vetores linearmente independentes.

**Sinopse de Álgebra Linear (1975)**

O livro Sinopse de Álgebra Linear, é datado de 1975 e tem como autores Luiz Medeiros, Guilherme de La Penha e Gustavo Menzala. Na figura 3 é possível observar a Capa e o índice do livro.



INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

TEXTOS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS NO 7

S I N O P S E
D E
Á L G E B R A   L I N E A R
(notas de aula)
por
Guilherme M. de La Penha

Rio de Janeiro - GB
1 9 7 5

ÍNDICE



Fig. 3: Capa e índice do livro Sinopse de Álgebra Linear (1975)
Fonte: Acervo Guilherme de La Penha

É observável também a presença de uma apresentação do livro intitulada 'Ao leitor', na qual Le Penha afirmou que estas notas são exposições feitas por ele ao longo das vezes que ministrou a disciplina de Álgebra Linear para estudantes que iniciaram mestrado na COPPE e IM-UFRJ entre 1970 e 1973. É possível observar esse diálogo do autor na Figura 4.

No que diz respeito ao conteúdo de espaços vetoriais, são abordados os tópicos: espaço vetorial sobre um corpo, no qual são apresentados os axiomas dessa definição e suas consequências; dependência Linear, com a abordagem de base e soma de combinação linear; independência linear; construção de base, na qual são trabalhadas construção de bases; dimensão e geradores.

Sobre as transformações lineares, são trabalhados os isomorfismos das aplicações lineares, divididos em duas partes. A primeira parte contendo conceitos como de aditividade, homogeneidade e endomorfismo; na segunda parte, os conceitos presentes são de dimensão e base, subespaços vetoriais, biproduto, soma direta interna de subespaços, espaço suplementar, transversal, complementar e equivalente; estrutura de aplicações lineares.

AO LEITOR

Estas notas reproduzem literalmente as exposições feitas por mim, ao longo das vezes que ministrei a disciplina de Álgebra Linear para estudantes que iniciaram mestrado, tanto na COPPE quanto no IM.UFRJ, no período 1970-1973.

O conteúdo, afora os exercícios e exemplos é, exatamente, o adequado a 36 horas de aula em um período. A eliminação de exercícios e exemplos, é contingência para tornar o texto compacto. Entretanto, algumas proposições deixadas sem demonstração podem servir como exercícios simples. Ao publicá-lo, pensei unicamente em elaborar um "plano de aulas", acessível para a disciplina, facilitando o trabalho de docentes que, porventura, venham a ministrá-la.

Obviamente, o conteúdo reflete, em parte, as minhas preferências sob o vínculo do número limitado de aulas. De modo geral, entretanto, o espectro essencial da disciplina é abordado, a Bibliografia mencionada dá ampla margem à desenvolvimentos, qualquer que seja a direção.

Sacrifiquei o estudo de espaços com produto interno em troca do estudo da dualidade; com esta base, a compreensão algébrica do produto interno se torna simples. Também o teorema espectral e o estudo de determinantes não foram abordados para dar lugar a formas canônicas. O primeiro, se deveu à omissão do detalhamento de transformações lineares em espaços com produto interno, o segundo, por ser incluído, de modo natural, ao abordar-se Álgebra Multilinear. Pretendo posteriormente publicar mais detalhamente a decomposição de Jordan juntamente com exemplos e aplicações desenvolvendo o esboço contido nestas notas.

Durante os vários estágios de meu trabalho de pesquisa e ensino de pós-graduação, os auxílios do BNDE, FINEP, CNPq e CEPG-UFRJ, foram preciosos e são, oportunamente, aqui agradecidos.

Fig. 4: Apresentação do livro Sinopse de Álgebra Linear pelos autores
Fonte: Medeiros, Le Penha & Menzala (1975)

Em relação a abordagem metodológica, observa-se que é compacto, com poucos exemplos, algumas proposições demonstradas e outras deixadas ao leitor, assim como a ausência de conteúdos referente a Álgebra Linear, justificadas inicialmente. O livro é iniciado com Corpos e Espaços Vetoriais e finaliza com forma de Jordan e apêndices sobre Operações Algébricas e Estruturas Algébricas.

Percebe-se que o livro *Sinopse de Álgebra Linear* não é adequado para um primeiro contanto com essa disciplina, visto que faz uso de linguagem com maior nível de abstração e alguns conceitos são pré-requisito para tal estudo, uma vez que este foi escrito com base nas aulas de La Penha na COPPE e IM-UFRJ.

**Introdução a Álgebra Linear (1977)**

O livro *Introdução a Álgebra Linear* (1977), de autoria de Guilherme de La Penha e Mina Seinfeld de Carakushansky, a partir da experiência com Álgebra I e II. Salientamos que esse livro foi publicado pela McGraw-Hill em 1976 (Figura 5), adotado em diversas universidades brasileiras e universidades da América Latina como *'Introducción al álgebra linear*', traduzido por professores de Bogotá.

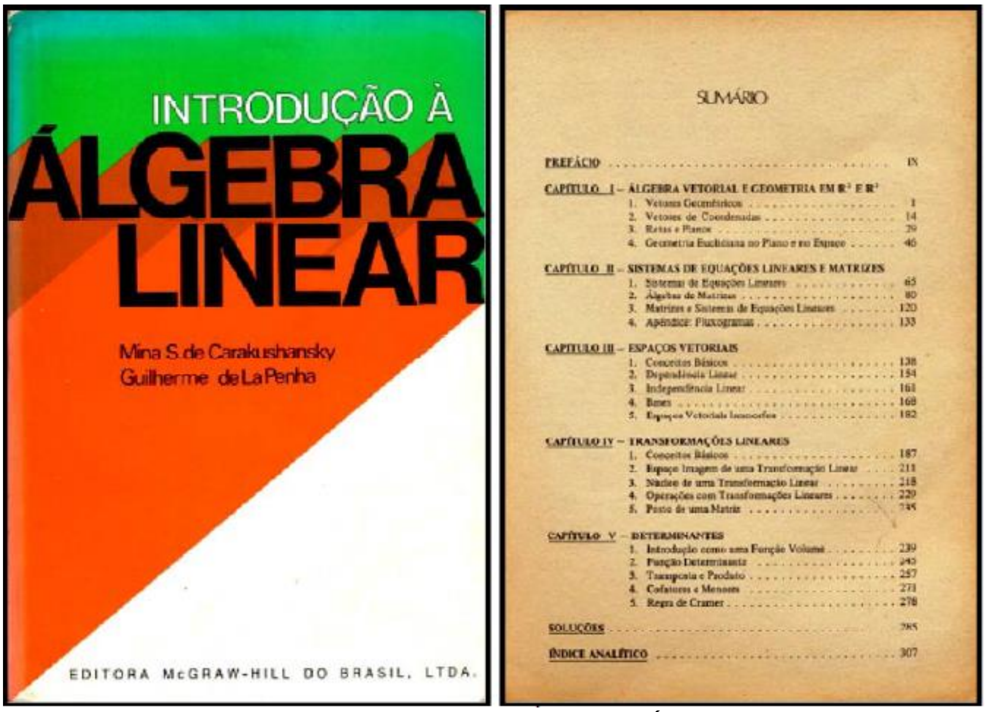


Figura 5: Capa e sumário do livro *Introdução a Álgebra Linear* (1977)
Fonte: Acervo Guilherme de La Penha

É pertinente ressaltar que os autores, no prefácio do livro, dissertam sobre o objetivo deste e quais pressupostos tiverem em sua organização, com destaque para os cálculos e interpretações geométricas no $R^2$ e $R^3$, fato que pode ser contatado quando afirmam:

> Embora objetivando servir a propósitos de nível universitário, o texto abrange detalhadamente tópicos que são exigidos usualmente nos programas de exames vestibulares e nas últimas séries do 2º grau. Assim, o nível do texto situa-se nessa região de transição, tendo sido envidados esforços no sentido de torna-lo totalmente acessível ao estudante nesse estágio. Como os métodos de Álgebra Linear constituem novidade para

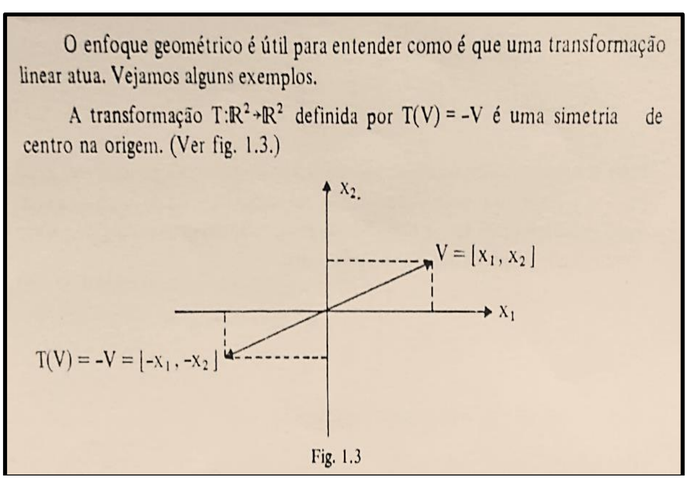
> muitos estudantes, a ênfase reside em cálculos e interpretações geométricas em $R^2$ e $R^3$, de modo a dar tempo para que absorvam conceitos com os quais não estejam familiarizados. Desse modo teve-se em mente as seguintes regras mestras: (1) o texto deveria ser de conteúdo tão geométrico quanto possível, objetivando-se amenizar sua abstração natural; (2) a abordagem de determinantes deveria ser breve, porém calcada em conceitos úteis para generalizações, desenfatizando-se seu caráter de ferramenta de cálculo de baixa eficiência e discutida utilidade; (3) os tópicos a serem abreviados sob pressão de tempo limitado para expô-los deveriam ser os espaços vetoriais e as transformações lineares, sob o ponto de vista intrínseco.
>
> (CARAKUSHANSKY & LA PENHA, 1977, p. IX e X)

Em relação ao conteúdo de espaços vetoriais, são abordados no livro o conceito de espaço vetorial; propriedades elementares dos espaços vetoriais; subespaços; dependência linear; independência linear; bases e espaços vetoriais isomorfos.

No que concerne as transformações lineares, são trabalhados definição de transformação linear; representação de transformação linear; espaço imagem de uma transformação linear; núcleo de uma transformação linear; operações com transformações lineares e posto de uma matriz.

Em relação a abordagem metodológica dos conteúdos, percebe-se que é um livro mais completo diante dos anteriores, com uma linguagem clara e objetiva, explicações mais detalhadas e uma preocupação com conexão desses conteúdos a Matemática da educação básica, além disso, observa-se a presença de muitos exemplos e exercícios, na parte de espaços vetoriais há um total de 176 exercícios e nas transformações lineares cerca de 123 exercícios.

Ainda sobre o livro *Introdução à Álgebra Linear,* percebe-se a preocupação em apresentar diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático (Figura 6), preocupação essa também constante nos livros anteriores.


O enfoque geométrico é útil para entender como é que uma transformação linear atua. Vejamos alguns exemplos.

A transformação $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(V) = -V$ é uma simetria de centro na origem. (Ver fig. 1.3.)



Fig. 6: representação geométrica de uma transformação linear
Fonte: Carakushansky & La Penha (1977, p. 191)

Observa-se no recorte acima (Figura 6) que os autores apresentam a representação geométrica de uma aplicação T: $R^2 \rightarrow R^2$ definida por $T(V) = -V$, ou seja, uma aplicação simétrica no centro da origem. Essa preocupação da diversidade de representação, principalmente geométrica, de um mesmo objeto matemático é característica marcante nos livros de Guilherme de La Penha e está explicitado no índice do livro em tela.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Entendemos que atingimos nosso objetivo neste trabalho, visto que, apresentamos os livros de Álgebra Linear de autoria do cientista paraense Guilherme de La Penha, mais especificamente os livros *Álgebra Linear I e II (1974), Sinopse de Álgebra Linear (1975) e Introdução a Álgebra Linear (1977)*. Apoiados nos estudos de Chaquiam (2012) evidenciamos a memória de um matemático-físico da contemporaneidade, em Mendes (2012), buscamos o embasamento teórico e, a partir dos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha, as análises e comparações sobre os conteúdos de álgebra linear.

Os traços biográficos corroboram no sentido de que Guilherme de La Penha foi um cientista com grandes contribuições no que se refere à gestão e pesquisa no campo educacional, dentre as quais estão as contribuições voltadas para o campo da álgebra linear por meio dos seus livros.

Em relação aos livros *Álgebra Linear I e II (1974)*, foi possível constatar que os autores buscam definir objetos matemáticos a partir de noções intuitivas, como de espaço vetorial por exemplo. Além disso, percebe-se a preocupação dos autores em mostrar mais de uma representação do objeto matemático, geralmente associado à geométrica, e ainda, há uma quantidade considerável de exemplos e atividades propostas visando a consolidação dos conteúdos.

No que se refere o livro *Sinopse de Álgebra Linear (1975),* observou-se que é um livro compacto, com poucos exemplos e atividades. Entendemos que há necessidade de alguns conhecimentos prévios para seu manuseio, ou seja, não seria adequado para aqueles num primeiro contato com a disciplina de Álgebra Linear, visto que são basicamente exposições feitas pelo autor a partir de sua experiência enquanto professor e coordenador dessa disciplina na COPPE e IM-UFRJ, de certa forma, consoante com o título do livro.

No que concerne o livro *Introdução à Álgebra Linear (1977),* verificou-se que é um livro mais completo, com uma linguagem clara e objetiva, explicações mais detalhadas e a preocupação em relacionar os conteúdos de álgebra linear com a matemática da educação básica, além disso, observa-se a presença de muitos exemplos e atividades propostas.

Ainda sobre esse livro, percebeu-se também a preocupação em apresentar diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. É importante ressaltar que tal livro foi publicado pela McGraw-Hill, em 1976, adotado em diversas universidades brasileiras e também em universidades da América Latina sob o título *Introducción al álgebra linear*, uma tradução de professores de Bogotá.

De modo geral, foram identificadas como características marcantes nos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha a preocupação em apresentar diferentes formas de representação de um mesmo objeto, geralmente associadas às interpretações geométricas, e a busca pela conexão dos conteúdos dessa disciplina com a matemática comumente trabalhada na educação básica. Os livros atuais refletem tais preocupações, isto é, as preocupações do passado persistem até hoje nos livros álgebra linear, o que corroboram com a visão futurista de Guilherme de La Penha.

Os próximos passos em nossa pesquisa serão de analisar detalhadamente os tópicos referentes aos espaços vetoriais e transformações lineares, no intuito de caracterizar as abordagens metodológicas adotadas para apresentação desses conteúdos e compará-los com o constante em livros atuais utilizados em cursos de álgebra linear.

## REFERÊNCIAS

CARAKUSHANSKY, M. S & LA PENHA, G. M. S. M. de. **Álgebra Linear I:** 1ª Edição. Rio de Janeiro: UFRJ, 1974.

CARAKUSHANSKY, M. S & LA PENHA, G. M. S. M. de. **Álgebra Linear II:** 1ª Edição. Rio de Janeiro: UFRJ, 1974.

CHAQUIAM, Miguel. Guilherme de La Penha: Uma história do seu itinerário intelectual em três dimensões. Tese de Doutorado em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Natal – Rio Grande do Norte, 2012.

LA PENHA, G. M. S. M. de. **Introdução à Álgebra Linear.** 1ª Edição. São Paulo: McGraw-Hill, 1977.

MEDEIROS, L. A. da J; LA PENHA, G. M. S. & MENZALA, G. P. **Sinopse de Álgebra Linear.** 1ª Edição. Rio de Janeiro: UFRJ, 1975.

MENDES, Iran Abreu. Pesquisas em História da Educação Matemática no Brasil em três dimensões. In: **Revista Quipu**. vol. 14, n. 1. Enero-abril de 2012, p. 69-92.

# ANEXO II

## (IN)DEPENDÊNCIA LINEAR NOS LIVROS DE ÁLGEBRA LINEAR DO CIENTISTA PARAENSE GUILHERME DE LA PENHA
**um estudo sobre a abordagem metodológica**

Renan Marcelo da Costa Dias [3]
Miguel Chaquiam [4]

**RESUMO**

O intuito deste trabalho é analisar a abordagem de (in)dependência linear presente nos livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha (1942–1996), sob a análise do conteúdo discutida por Bardin (2010). Como metodologia de pesquisa adotou-se a do tipo bibliográfica-documental, na qual em um primeiro momento nos debruçamos sobre o itinerário de La Penha e as pesquisas a respeito de (in)dependência linear, além de buscarmos fundamentação metodológica no estudo de análise do conteúdo de Bardin (2010), que nos possibilitou criar as seguintes categorias para análise: (I) Introdução do conteúdo, (II) Definição do objeto matemático e (iii) Utilização de mais de uma representação do objeto matemático. Posteriormente foram analisados os livros Álgebra Linear I e II (1974), Sinopse de Álgebra Linear (1975) e Introdução a Álgebra Linear (1977) a partir das categorias elencadas a fim de identificar a abordagem metodológica presente nestes. A análise nos possibilitou identificar que a busca pela concretização das definições a partir de exemplos numéricos ou de outros conceitos sem o abandono do formalismo e a utilização de mais de uma representação do objeto matemático de modo a complementar a compreensão sobre este, são características marcantes nesses livros e que são convergentes com os apontamentos das pesquisas atuais. Desse modo, a partir dessas observações, nos foi possível conhecer melhor sobre Guilherme de La Penha, bem como sobre sua visão acerca do ensino de Álgebra Linear, fato que nos levou a refletir sobre a importância de pesquisas dessa natureza, uma vez que fornece ao professor de Matemática conhecimentos que possibilitarão ampliar a visão sobre os conteúdos analisados e suas transformações temporais, além de contribuir para a constituição dos acervos documentais.

**Palavras-chave:** História da Matemática. Guilherme de La Penha. Álgebra Linear. Análise de livros. Análise do conteúdo.

## INTRODUÇÃO

Este trabalho é parte da pesquisa intitulada ‘Sobre os livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha’ que tem por objetivo analisar os livros de Álgebra Linear de autoria de Guilherme de La Penha, na perspectiva da análise do conteúdo de Bardin (2010), a fim de compará-los com os livros atuais e situar aproximações e distanciamentos quanto aos conteúdos de espaços vetoriais. Neste trabalho, nos detemos à análise dos tópicos (in) dependência linear.

[3] Universidade do Estado do Pará (UEPA). renanmarcelo1998@gmail.com
[4] Universidade do Estado do Pará (UEPA). miguelchaquiam@gmail.com

A partir da última década do século XX, os estudos em história da Matemática e da Educação Matemática têm se atentado às histórias de vida e formação, apoiando-se na história oral como técnica de pesquisa e na da organização da memória da Matemática e da Educação Matemática.

Percebe-se que as histórias da disciplina Matemática, das instituições sociais e educacionais, das (auto) biografias de matemáticos e professores que ensinaram matemática, fazem-se presente nas pesquisas em História da Matemática e História da Educação Matemática, assim possibilitam o surgimento de importantes contribuições para formação de professores de matemática, além de fomentar a constituição de acervos documentais, das memórias e da preservação do patrimônio educacional brasileiro (MENDES, 2012).

Segundos Mendes (2012), a análise de itinerários, sistemas escolares, modelos e métodos de ensino, materiais didáticos, memórias de academias, artigos, teses e livros, são alguns dos fragmentos deixados por cientistas, matemáticos e na formação de professores de Matemática, entre outros personagens que compõem a história da Matemática e da Educação Matemática. Ao considerar esses aspectos como descritores históricos, assim como as expressões orais e escritas desses fatos, é possível pensarmos a importância da compreensão das biografias, histórias de vida, memórias de matemáticos e professores de Matemática, na tentativa de reconstrução da história da Matemática e da Educação Matemática no contexto em que essas histórias foram constituídas ao longo do tempo e espaço.

Desse modo, analisar documentos, publicações, falas e reflexões dos próprios sujeitos da pesquisa como princípios de validação dos estudos sobre personagens, produção de conhecimento matemático, instituições científicas e a organização da disciplina Matemática em diferentes épocas e contextos, se constituem em um dos fundamentos que tornam a abordagem histórica uma diretriz norteadora das pesquisas na formação de professores de Matemática e no ensino da Matemática, pois a partir da realização de tais estudos e pesquisas que envolvem a história da Matemática em suas dimensões epistemológicas, sociais e educativas é possível refletir sobre a Matemática atual (MENDES, 2012).

Nesse sentido, surgiu o interesse em analisar os livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha, uma vez este fora um grande produtor de conhecimento nas diversas áreas da ciência brasileira, em especial na matemática, no que se refere ao estudo da Álgebra Linear, através da produção de seus livros do conteúdo em questão, visto que um de seus livros foi adotado em diversas universidades brasileiras e latino-americanas.

Desse modo, esse trabalho tem por objetivo analisar os tópicos de (in) dependência linear constantes nos livros de Álgebra Linear de autoria de Guilherme de La Penha, na perspectiva da análise do conteúdo de Bardin (2010). A seguir encontra-se detalhadamente o itinerário acadêmico de Guilherme de La Penha, bem como sua produção científica.

## SOBRE GUILHERME DE LA PENHA

As informações referentes a Guilherme de La Penha foram obtidas na tese de doutorado do professor Miguel Chaquiam, defendida em 2012, na Universidade Federal do Rio Grande do Norte, que teve por título “GUILHERME DE LA PENHA: Uma história de seu itinerário intelectual em três dimensões”, cujo foco central foi a historiografia brasileira da ciência, voltado especificamente para a vida e obra de um matemático-físico da contemporaneidade.

Segundo o autor, La Penha tinha um perfil que pode ser considerado como de um intelectual múltiplo e transdisciplinar, que defendia a possibilidade de se formar um cientista uno e múltiplo, de atitude não linear e que dialoga com todas outras áreas, inspirado nos autores com os quais ele se identificou ao longo da sua formação e atuação profissional, como Arquimedes, Leonhard Euler e Cliford Ambrose Truesdell.

Filho de Miguel Marcos de La Penha e Nair Souza Marcos de La Penha, Guilherme Maurício Souza Marcos de La Penha nasceu no dia 09 de março de 1942 na cidade de Belém do Pará. Cursou o ciclo primário no extinto Instituto Suíço Brasileiro (1949 – 1952), posteriormente prestou exame e cursou o 1º ciclo secundário e ginasial no Colégio Marista Nossa Senha de Nazaré (1953 – 1956). Para uma melhor visualização, no quadro a seguir consta a carreira acadêmica de Guilherme de La Penha, com algumas de suas atividades.

QUADRO 1: ATIVIDADES ACADÊMICAS DE GUILHERME DE LA PENHA

| PERÍODO | ATIVIDADE | LOCAL |
|---|---|---|
| 1956 - 1959 | Curso de agrimensura | Escola Técnica de Agrimensura do Pará |

| | | |
|---|---|---|
| 1960 - 1964 | Curso de Engenharia Mecânica | UFPA/PUC – Rio |
| 1961 - 1963 | Curso de Aperfeiçoamento em Matemática | IMPA |
| 1964 - 1965 | Mestrado em Engenharia Mecânica | EPUC/PUC – Rio |
| 1965 - 1966 | Curso de Matemática aplicada e mecânica dos sólidos | Departamento de Matemática Aplicada e Física Teórica da universidade de Cambridge (INGLATERRA) |
| 1966 - 1968 | Doutorado em Matemática aplicada e mecânica dos sólidos | Universidade de Houston (EUA) |
| 1967 | Curso de Mecânica do Contínuo | Brows University e Virgínia Polytechnic Institute |
| 1969 | Curso de Mecânica do Contínuo | Johns Hopkins University |
| 1968 - 1969 | Pós Doutoramento em Matemática Aplicada | University Carnegie-Mellon |

Fonte: Chaquiam (2012)

Além das significativas publicações em diversos campos da matemática, La Penha também contribuiu ao ensino de Álgebra Linear, por meio de seus livros: Álgebra Linear I e II (1974), Sinopse de Álgebra Linear (1975) e Introdução a Álgebra Linear (1977). Se faz necessário ressaltar que o livro Introdução a Álgebra Linear, publicado pela McGraw-Hill em 1977, foi adotado em diversas universidades brasileiras e também em universidades da América Latina, como *'Introducción al álgebra linear'*, traduzido por professores de Bogotá.

Segundo Dias & Chaquiam (2018), o intuito de Guilherme de La Penha na escrita desses livros era dar um tratamento conceitual moderno na abordagem metodológicas destes, uma vez que ressaltar-se-ia as influências algébricas e geométricas desses estudos, bem como a importâncias dos métodos numéricos.

Os autores concluíram que a preocupação em apresentar diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático, a busca pela conexão dos conteúdos dessa disciplina com a matemática comumente trabalhada na educação básica e nos próprios conteúdos trabalhados na Álgebra linear são características marcantes desses livros. Nesse sentido, os livros atuais refletem tais preocupações, isto é, as preocupações do passado persistem hoje nos livros de Álgebra Linear, o que corrobora com a de visão futurista de La Penha.

## (IN)DEPENDÊNCIA LINEAR

O estudo de (in)dependência linear é um dos tópicos que compõem a disciplina Álgebra Linear. A importância de estudo e pesquisa desta disciplina repousa no fato de que ela se encontra subjacente a quase todos os domínios da Matemática e aqueles que desejam trabalhar com ela (Matemática), seja como foco de pesquisa ou como ferramenta para outros estudos, devem ter o domínio de seus principais conceitos e um deles é a Álgebra Linear.

Segundo Grande (2006), os conceitos de (in)dependência linear são importantes, pois serão usados em outros objetos matemáticos, que por sua vez fornece informações sobre este, e ainda interliga conceitos chaves no estudo em questão. Entretanto, Andrade (2010) afirma que é consenso nas literaturas que os alunos deixam os cursos de Álgebra Linear com dificuldades nos conceitos de (in)dependência linear, geralmente atribuídas em parte à sua natureza.

Por outro lado, Souza (2016) aponta que os alunos têm dificuldades em transitar entre diferentes tipos de registros de representação semiótica, do algébrico para o geométrico se tratando de (in) dependência linear, e Coimbra (2008) destaca que o uso da geometria na aprendizagem de Álgebra Linear deve ser visto com bastante cautela, pois ao passo que pode auxiliar pode também impossibilitar que os alunos compreendam os conceitos em sua plenitude.

Nesse contexto, segundo Coimbra (2008), no estudo de Álgebra Linear, a geometria poderá contribuir a partir de seus exemplos e figuras, mas deve-se atentar ao exagero desta, visto que aparenta ao aluno que a Álgebra Linear está baseada somente na geometria. Assim, é importante a integração de domínios no intuito de que o aluno perceba as correspondências entre as definições, figuras, os exemplos e tenha uma visão mais ampla dos conceitos.

## METODOLOGIA DE PESQUISA

Como metodologia de pesquisa, adotamos a do tipo bibliográfica-documental, que segundo Gil (2008), é a pesquisa que se utiliza de material já elaborado constituído principalmente de livros e artigos científicos, pois permite ao investigador uma visão ampla dos estudos já realizados sobre o tema. Nesse sentido buscamos estudos que tratem da importância da pesquisa de personagens históricos e do itinerário de Guilherme de La Penha, e ainda trabalhos sobre as dificuldades nos conceitos de (in) dependência linear.

Além disso, de acordo com Gil (2008), também nessa metodologia são utilizados documentos que ainda não tiveram um tratamento analítico ou que podem ser reelaborados de acordo com o objetivo da pesquisa, que em nosso caso são os livros Álgebra Linear I e II (1974), Sinopse de Álgebra Linear (1976) e Introdução a Álgebra Linear (1977), de autoria de Guilherme de La Penha e outros professores, que serão analisados sob a análise do conteúdo na perspectiva de Bardin (2010).

A análise do conteúdo enquanto metodologia é definida como sendo 'um conjunto de técnicas de análises das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens' (BARDIN, 2010, p. 44). Em outras palavras, a análise do conteúdo nos possibilita inferir informações ocultas no texto, seja ele escrito, oral, em sinais, através de imagens ou sons, a partir de objetivos anteriormente definidos e mediante a decodificação da mensagem.

Embora esse método seja comumente usado nas ciências sociais, o seu caráter marcado por uma disparidade de formas e adaptável a um campo de aplicação muito vasto (as comunicações), abre portas para outras áreas, dentre estas, a Matemática; fato que nos motivou a utilizá-la para analisar os livros em questão. Segundo Bardin (2010), essas inferências são alcançadas a partir de um roteiro pré-estabelecido que são organizados em torno de três polos cronológicos: Pré-análise, Exploração do Material e Tratamento dos resultados obtidos na interpretação.

A Pré-análise tem por objetivo a organização, embora ela própria seja composta por atividades não estruturadas, na qual há a escolha dos documentos a serem analisados, através das regras de exaustividade, representatividade, homogeneidade e pertinência; a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final, não cronologicamente nessa ordem (BARDIN, 2010).

A exploração do material, é basicamente uma aplicação sistemática das decisões tomadas na Pré-análise, onde o analista realiza operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função de regras previamente formuladas. Após esse momento, o próximo passo é o tratamento dos resultados obtidos na interpretação, pois o analista tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis, pode então propor inferências e adiantar intepretações a propósito dos objetivos previstos ou outras descobertas (BARDIN, 2010).

Entretanto, como organizar os dados brutos a fim de uma melhor análise? Para Bardin (2010), a categorização desses dados é perfeita para esse objetivo, pois fornece de forma condensada uma representação simplificada destes, uma vez que evita desvios do material e dá conhecimento dos índices invisíveis ao nível dos dados brutos. Para tal fim, é necessário criar boas categorias, com as seguintes qualidades: exclusão mútua, homogeneidade, pertinência, objetividade e finalidade e produtividade (BARDIN, 2010).

Diante dos pressupostos elencados e considerando o que se refere a exploração do material, para uma melhor organização dos dados e fluidez do trabalho, tomadas as observações de Dias & Chaquiam (2018) sobre os mesmos livros, criamos três categorias de análise a fim de obter inferências relevantes à nossa pesquisa, sejam elas: (i) Introdução do conteúdo; (ii) Definição do objeto Matemático e (iii) Utilização de mais de uma representação do objeto Matemático.

Na primeira categoria, verificamos de que forma são introduzidos os conteúdos de (in) dependência linear, a segunda categoria será responsável pela observação do modo de definição dos objetos matemáticos a serem analisados, e na terceira vamos identificar de que forma são trabalhadas outras formas de representação, que não o algébrico, desses mesmos objetos. De posse das categorias, partimos para a análise dos livros.

Visando uma melhor organização do trabalho, renomeamos os livros da seguinte maneira: Álgebra Linear I e II – AL1, Sinopse de Álgebra Linear – AL2 e Introdução à Álgebra Linear – AL3.

## DISCUSSÃO DAS ANÁLISES DOS LIVROS

Apresentamos os recortes dos conteúdos relacionados a (in) dependência linear constante nos livros de Guilherme de La Penha com o intuito de apresentar uma análise a respeito desses conteúdos segundo as categorias (i), (ii) e (iii), bem como, correlação com dificuldades à aprendizagem de Álgebra Linear.

O livro AL1 é de autoria de Guilherme de La Penha em parceria com Mina Seinfeld de Carakushansky, e foi editado UFRJ. A seguir apresentamos as análises e discussões segundo as categorias elencadas inicialmente.

*(iv) Introdução do conteúdo*

No livro AL1 iniciam o tópico de dependência linear a partir de um exemplo numérico da escrita de um determinado vetor como combinação linear dos vetores das bases canônicas do $R^3$.

> Consideremos o vetor V1 = [8, -9, 2] de $R^3$. Este vetor pode ser escrito como 8 [1,0,0] + (-9) [0,1,0] + 2 [0,0,1]. De fato, se [x1, x2, x3] é qualquer vetor em $R^3$, temos que [x1, x2, x3] = x1 [1,0,0] + x2 [0,1,0] + x3 [0,0,1]. Vemos assim, que <u>qualquer</u> vetor do $R^3$, pode ser expresso em termos dos três vetores fixos [1,0,0], [0,1,0] e [0,0,1]. Queremos estudar agora o processo de geração de vetores e subespaços (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1974, p. 217).

Em relação a independência linear, os autores trazem essa ideia com base em conceitos anteriormente definidos como de geradores, combinação linear e dependência linear.

> É óbvio que é mais fácil trabalhar com conjuntos finitos do que com conjuntos infinitos. Assim, em lugar de termos que saber quais são todos os vetores em v, podemos escolher um conjunto de vetores que gerem v (...). Se o conjunto de geradores é linearmente dependente, podemos eliminar alguns dos vetores e ainda ter um conjunto de geradores. Se o novo conjunto ainda é linearmente dependente, podemos eliminar outros vetores, e assim por diante, pelo método da exaustão. O conjunto ideal de vetores ao qual queremos chegar é que gere o espaço vetorial, mas que não seja linearmente dependente (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1974, p. 225).

Percebemos que os autores buscam introduzir dependência linear através de um exemplo numérico, para depois definir combinação linear, geradores e dependência linear. Independência linear é tratada a partir da ideia da redução de vetores geradores linearmente dependentes até que eles deixem de ser linearmente dependentes. Desse modo, observa-se uma inter-relação entre os tópicos constantes nos livros promovida pelos autores, que fornece ideia de complementação das definições.

*(v) Definição do objeto matemático*

Dependência linear é assim definida no AL1:

> ‘Um conjunto não vazio de vetores {V1, V2, ..., Vk} de um espaço vetorial v é chamado Linearmente dependente (abreviamente LD) se e somente se (pelos menos) um dos vetores Vi é combinação linear dos demais vetores desse conjunto, isto é, se e somente se, para algum Vi, podemos achar escalares convenientes designados por C1 tais que V1 = C1V1 + C2V2 + ... + Ci-1Vi-1 + Ci+1Vi+1 + ... + CkVk’ (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1974, p. 218).

Como já discutido, os autores partem da ideia de redução de vetores geradores linearmente dependentes até que eles deixem de ser linearmente dependentes, desse modo esse novo conjunto de vetores é assim definido: ‘Um conjunto de vetores {V1, V2, ..., Vk} é Linearmente independente se e somente se C1V1 + C2V2 + ... + CnVn = 0 implica no fato de todos os Ci’s serem iguais a zero’ (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1974, p. 225).

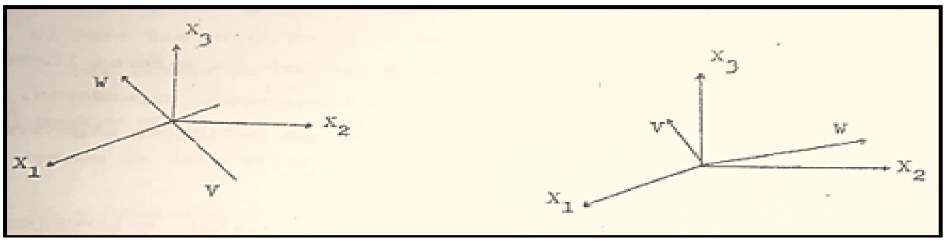
Observa-se que, embora sejam utilizados exemplos numéricos para a concretização das definições, os autores não abandonam a definição formal de (in)dependência linear, mas a complementa a partir dessas ideias numéricas. Além disso, observa-se uma inter-relação entre os conceitos trabalhamos, que demonstra uma coerência de ideias.

*(vi) Utilização de mais de uma representação do objeto matemático*

Identificamos pelo menos três formas de representação de (in)dependência linear. A exemplo das representações de Independência linear, verificamos a Representação na Linguagem natural: ‘É evidente que V e W são linearmente independente se e somente se um não é múltiplo escalar do outro’ (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1974, p. 226).

Representação algébrica: ‘C1V1 + C2V2 + ... + CnVn = 0 → Ci = 0’, e ainda a representação geométrica, onde segundo os autores dois vetores são linearmente independente se não são colineares ou, no caso de três vetores, não são coplanares, como se pode observar na figura 1.

FIGURA 1: Vetores LI no $R^2$ e $R^3$




Fonte: La Penha & Carakushansky (1974, p. 227)

Em síntese, o livro AL1 possui uma linguagem clara e objetiva, no qual os autores partem de exemplos numéricos para a formalização de conceitos com rigor matemático, se verifica uma interrelação entre os conhecimentos trabalhados, e ainda que o uso de mais de uma representação de (in)dependência linear é vista de forma a complementar.

O livro AL2 é datado de 1975 e tem como autores Luiz Medeiros, Guilherme de La Penha e Gustavo Menzala. A seguir apresentamos as análises e discussões segundo as categorias já indicadas.

*(iv) Introdução do conteúdo*

No livro AL2, os autores caminham com base num novo conceito denominado suporte de uma família, assim definido:

> Sejam (Vi)i ϵ I uma família de vetores de V, chamamos <u>suporte</u> da família (Vi) i ϵ I o subconjunto J do conjunto de índices I, caracterizado por J = {i ϵ I | V1 ≠ 0}, ou seja, o suporte de uma família de vetores caracteriza os elementos distintos de zero dessa família (MEDEIROS, LA PENHA & MENZALA, 1975 p. 18)

A partir desse conceito, é que são definidos combinação linear e geradores. Percebemos que os autores utilizam o conceito de família como base explicativa para as outras definições, através de uma linguagem axiomática e formal, a exemplo da definição de combinação linear: 'Um vetor u ϵ V é chamado de <u>(soma da) combinação linear</u> de uma família (ui) i ϵ I de vetores de V, se existe uma família ($\Lambda^i$) i ϵ I de escalares de K, possuindo suporte finito J tal que: u = $\sum_I$ ($\Lambda^i$ . ui)' (MEDEIROS, LA PENHA & MENZALA, 1975, p. 19).

*(v) Definição do objeto matemático*

Os autores do livro AL2 definem dependência linear da seguinte forma:

> Seja (ui) i ϵ I uma dada família de vetores, o conjunto de elementos dessa família, {ui} é dito linearmente dependente, se o vetor zero da combinação linear não trivial de uma subfamília (ui)i ϵ I onde h está contido em I e quaisquer que sejam os índices distintos j, k ϵ H, uj ≠ uk. Assim, se {ui | i ϵ I} é linearmente dependente, existe ($\Lambda^i$) i ϵ H do suporte finito e tal que: $\sum_H$ ($\Lambda^i$ . ui) = 0 e o suporte de ($\Lambda^i$) i ϵ H não é vazio (MEDEIROS, LA PENHA & MENZALA, 1975, p. 20).

A definição de independência linear também é apresentada de maneira análoga, a partir de um novo conceito:

> Uma família de vetores (ui) i ϵ I é dita <u>livre</u>, ou é um <u>sistema livre</u> se não for ligada, i. e., (ui) i ϵ I é livre quando u = $\sum_I$ $\Lambda^i$ . ui = 0. Implica

> em que ($\lambda^i$) i ϵ I possua suporte vazia ($\lambda^i$ = 0, ∀ i ϵ I. É claro que toda subfamília de uma família livre de vetores é também livre. Se (ui) i ϵ I é uma família livre, então para qualquer par de índices distintos j, k ϵ I tem-se uj ≠ uk e a aplicação I → V: i → vi é injetora. Os vetores de um sistema livre são ditos linearmente independente (MEDEIROS, LA PENHA & MENZALA, 1975, p. 22).

É possível perceber que para definir dependência linear os autores a apresentam de forma direta a partir de combinação linear, embora também esteja diluído a ideia de família, da mesma forma é conceituada independência linear, mas sobre a ideia de vetores livres.

Dessa forma, verifica-se que La Penha não utiliza esses novos conceitos como facilitadores na compreensão de (in)dependência linear, até porque tais conceitos não são tão claros ao primeiro olhar, e sim visando uma complementação à essas definições em busca da compreensão total do objeto matemático.

*(vi) Utilização de mais de uma representação do objeto matemático*

Identificamos apenas uma representação de (in)dependência linear que envolve a linguagem algébrica e linguagem natural, como visto nas definições apresentadas na categoria anterior, entretanto não identificamos nenhuma representação geométrica do referido tópico.

Acreditamos que essa representação geométrica não foi apresentada no livro AL2, embora esteja nos livros AL1 e AL3, devido ao fato de ser um resumo das principais definições da Álgebra linear. De maneira sucinta, o livro AL2 é um livro compacto com uma linguagem mais formal e axiomática, apresenta poucos exemplo e exercícios, e as definições presente neste estão embasadas em outras ideias como de família e vetores livres.

O livro AL3 é de Guilherme de La Penha e Mina Seinfeld de Carakushansky. Vale ressaltar que esse livro foi publicado em 1977 e adotado em universidades brasileiras e Latino-americanas.

*(i) Introdução do conteúdo*

Para introduzir o tópico em estudo o autor parte de um exemplo numérico do vetor V1 = [8, -9, 2] escrito como combinação linear dos vetores das bases canônicas do $R^3$, e em seguida formaliza as definições de combinação linear, geradores e (in) dependência linear concretizadas por esse exemplo.

O fato de os livros AL1 e AL3 ter 3 anos de diferença e ainda possuir as mesmas metodologias que concretiza as definições a partir de exemplos numéricos, demonstra que essa abordagem utilizada por La Penha é algo recorrente em seus livros e que pode ser considerada uma das características marcantes dentre suas contribuições ao estudo dos Espaços Vetoriais.

*(ii) Definição do Objeto Matemático*

Os autores assim definem dependência linear no Livro AL3:

> Um conjunto {V1, V2, ..., Vk} (com K > 1) de vetores de um espaço vetorial v é chamado linearmente dependente (abreviamente LD) se (pelo menos) algum dos vetores vi é combinação linear dos demais vetores desse conjunto, isto é, se para algum Vi, podemos achar escalares convenientes designados por αj, tais que Vi = α1V1 + α2V2 + ... + αi-1Vi-1 + αj+1Vi+1 + ... + αkVk (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1977, p. 155).

Sobre a definição de independência linear, da mesma forma vista no livro AL1, ela acontece a partir da redução de vetores geradores linearmente dependentes pelo método da exaustão até serem linearmente independentes, e assim apresenta-se a definição formal: ‘Um conjunto de vetores {V1, V2, ..., Vn} é linearmente independente se e somente se a afirmação de que α1V1 + α2V2 + ... + αnVn = 0 implica no fato de todos os ai’s (i = 1, 2, ..., n) serem iguais a zero.

Semelhante ao Livro AL1, percebe-se que o autor, embora trabalhe com exemplos numéricos visando uma concretização das ideias, não abandona a definição formal de (in) dependência linear e, em especial nesse livro, nota-se uma clareza ainda maior em relação ao primeiro livro, pois há um detalhamento mais completo e uma melhor organização.

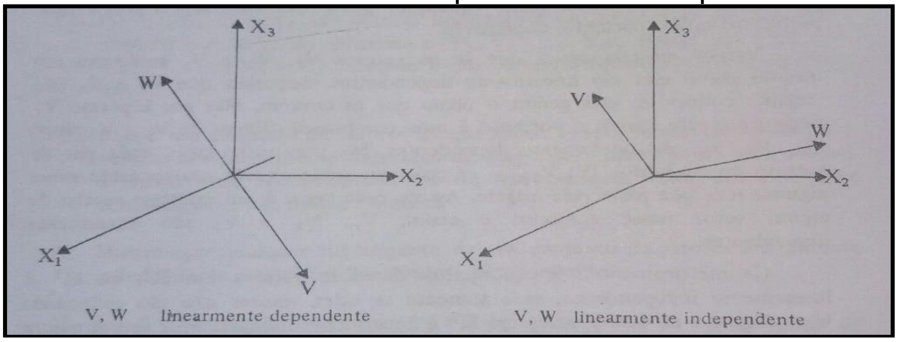
*(iii) Utilização de mais de uma representação do objeto matemático*

Análogo ao livro AL1, em relação a utilização de mais de uma representação do objeto matemático, percebemos pelo menos três representações do mesmo objeto, sejam elas: Linguagem natural, representação algébrica e representação geométrica.

Em relação as três representações, sobre a ideia de dependência linear, a primeira é a representação na linguagem natural da seguinte forma: ‘É evidente que V e W são linearmente dependente se e somente se um é múltiplo escalar do outro (LA PENHA E CARAKUSHANSKY, 1977, p. 162).

A segunda é a representação algébrica: ‘α1V1 + α2V2 + ... + αnVn = 0 → α1’s ≠ 0’, e a terceira é a representação geométrica, na qual os autores afirmam que dois vetores são linearmente dependente se são colineares, caso contrário são linearmente independente, como é possível observar na figura 3.

FIGURA 3: Vetores linearmente dependentes e independentes no R²




Fonte: La Penha & Carakushansky (1977, p. 163)

Observa-se que, como também no livro AL1, os autores utilizam as outras representações, além da algébrica, de modo a complementar o conhecimento sobre o objeto em estudo, a partir do reconhecimento deste em outras formas de representação e não como facilitadoras da compreensão de conceito.

De maneira geral, percebemos que o livro AL3 é mais completo, com definições mais detalhadas e exemplos mais concretos, no qual os autores permanecem com as mesmas ideias dos livros anteriores, o que demonstra uma linearidade no estudo de (in)dependência linear, principalmente no que diz respeito ao uso de mais de uma representação do objeto matemático de forma que o aluno compreenda por completo o objeto em estudo, e ainda a inter-relação entre os conceitos trabalhados.

Em resumo, no que se refere a 1º categoria, percebemos que nos livros AL1 e AL3 (in)dependência linear são introduzidos a partir de exemplos numéricos, e no livro AL2 a partir de outros conceitos como de família e vetores livres, tais ações em busca da concretização dessas ideias, mas sem o abandono do formalismo e rigor matemático.

Esse fato é concernente com os estudos atuais, pois segundo Andrade (2010), as dificuldades dos alunos são atribuídas em parte à sua natureza, uma vez que os alunos conseguem manipular os algoritmos sem entende-los, e à aspectos cognitivos como a exemplo a linguagem axiomática dessa disciplina que, embora se tenha ciência da importância do formalismo, distancia o aluno do objeto de estudo.

Em relação à 2º categoria, observamos que nos três livros não há o abandono do rigor matemático ao definir (in)dependência linear, uma vez que La

Penha utiliza-se de outros conceitos como complemento dessas definições, para que aluno compreende o objeto em sua totalidade. Desse modo, podemos afirmar que La Penha consegue equilibrar a concretização e o formalismo das definições, conforme orienta os estudos atuais.

Sobre a 3º categoria, verificamos no livro AL1 e AL3 pelo menos três representações: Linguagem natural, algébrica e geométrica. Em relação a representação geométrica, nota-se que a utilização desta é de forma a complementar o conhecimento sobre (in)dependência linear. Essa situação não foi observada no livro AL2, pois se trata de um resumo das principais definições da Álgebra linear, fato que justifica a ausência de algumas representações.

Novamente, os livros de La Penha convergem com os estudos atuais, pois Souza (2016) aponta que os alunos têm dificuldades em transitar em diferentes tipos de registros de representação semiótica no estudo de (in)dependência linear. Coimbra (2008) destaca que o registro geométrico na Álgebra Linear pode ser uma boa ferramenta para isso, mas deve ser visto com bastante cautela, pois ao passo que pode auxiliar pode também impossibilitar que os alunos compreendam os conceitos em sua plenitude.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse trabalho era analisar os tópicos de (in)dependência linear constantes nos livros de Álgebra Linear de autoria de Guilherme de La Penha, na perspectiva da análise do conteúdo de Bardin (2010). Essa teoria nos permitiu criar três categorias de análise, sejam elas: (i) Introdução do conteúdo, (ii) Definição do objeto matemático e (ii) Utilização de mais de uma representação do objeto matemático.

Diante das análises a partir das três categorias, percebemos que La Penha buscava em seus livros a concretização de (in)dependência linear a partir de exemplos numéricos ou com base em outros conceitos da própria Álgebra Linear, no entanto sem abandonar o formalismo e o rigor matemático. Esse fato é discutido pelos estudos atuais, visto que é necessário que haja um equilíbrio entre o formalismo da linguagem e a concretização da Álgebra Linear

Além disso, também percebemos a preocupação de La Penha ao apresentar mais de uma representação diferente da algébrica de (in)dependência linear, uma vez que essas outras representações complementam o conhecimento sobre o próprio objeto matemático. Essa preocupação é defendida pelos estudos supracitados, pois em alguns casos o aluno se limita ao conhecimento de uma dessas representações, e a substitui pela própria definição.

De modo geral, vimos que os livros analisados possuem metodologias direcionadas a um determinado público alvo, o que não nos permite julgar qual o melhor ou pior, como por exemplo, o livro AL2 que possui uma linguagem mais formal e axiomática visto que são notas de exposições de aulas ministradas no mestrado e o livro AL3 voltado a iniciantes da Álgebra Linear, que por sua vez assemelha-se ao livro AL1 em termos metodológicos

A preocupação Guilherme de La Penha acerca da concretização da Álgebra Linear e da apresentação de mais de uma representação de (in)dependência linear como complemento da definição, sendo essas características convergentes aos apontamentos dos estudos recentes sobre Álgebra Linear, corrobora com a ideia defendida por Dias & Chaquiam (2018), de que os livros atuais refletem tais preocupações, ou seja, que as preocupações no ensino de Álgebra Linear do passado persistem até hoje nesses mesmo livros, o que ratifica a visão futurista de Guilherme de La Penha.

De maneira geral, a análise dos livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha nos possibilitou maiores informações sobre este, e ainda sobre sua visão do ensino de (in)dependência linear, uma vez que, de acordo com Mendes (2012), ao considerar esses livros como descritores históricos, assim como as expressões orais e escritas desses fatos, nos levou a refletir sobre a importância das biografias de matemáticos e professores de Matemática, no intuito de reconstruir a história da Matemática e da Educação Matemática no contexto em que essas histórias foram constituídas ao longo do tempo e espaço.

Assim, ao analisar esses documentos como princípios de validação dos estudos sobre Guilherme de La Penha, foi possível observar a importância da abordagem histórica como diretriz norteadora das pesquisas na formação de professores de Matemática e no ensino da Matemática, pois a partir dessa visão refletimos sobre o ensino atual de Álgebra Linear.

Nesse sentido, podemos ressaltar a importância de trabalhos dessa natureza, uma vez que agrega ao professor de Matemática conhecimentos valiosos que possibilitarão uma visão mais ampla das modificações dos conteúdos relacionados a sua disciplina, além da contribuição para a constituição dos acervos documentais, das memórias e da preservação do patrimônio educacional brasileiro.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ANDRADE, J. P. G. **Vetores:** Interações a distância para a aprendizagem de Álgebra Linear. Mestrado em Educação Matemática e Tecnologia. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2010.

BARDIN, L. **Análise do Conteúdo**. Tradução: Luíz Antero Reto. 1ª Edição. São Paulo: Edições 70, 2016.

CARAKUSHANSKY, M. S & LA PENHA, G. M. S. M. de. **Álgebra Linear I:** 1ª Edição. Rio de Janeiro: UFRJ, 1974.

CARAKUSHANSKY, M. S & LA PENHA, G. M. S. M. de. **Álgebra Linear II:** 1ª Edição. Rio de Janeiro: UFRJ, 1974.

COIMBRA, J. L. **Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem de álgebra linear.** Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. Universidade Federal do Pará. Belém, 2008.

CHAQUIAM, Miguel. **Guilherme de La Penha:** Uma história do seu itinerário intelectual em três dimensões. Tese de Doutorado em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal – Rio Grande do Norte, 2012.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6ª Edição. São Paulo: Editora Atlas, 2008.

GRANDE, A. L. **O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de álgebra linear**. Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica – SP. São Paulo, 2006.

LA PENHA, G. M. S. M. de. **Introdução à Álgebra Linear**. 1ª Edição. São Paulo: McGraw-Hill, 1977.

MEDEIROS, L. A. da J; LA PENHA, G. M. S. & MENZALA, G. P. **Sinopse de Álgebra Linear.** 1ª Edição. Rio de Janeiro: UFRJ, 1975.

MENDES, Iran Abreu. **Pesquisas em História da Educação Matemática no Brasil em três dimensões**. In: Revista Quipu. vol. 14, n. 1. Enero-abril de 2012, p. 69-92.

SOUZA, M. L. **Dependência e independência linear:** Um estudo a respeito das dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2016.

**ANEXO III**

# BASE E DIMENSÃO NOS LIVROS DE ÁLGEBRA LINEAR DO CIENTISTA PARAENSE GUILHERME DE LA PENHA

**Renan Marcelo da Costa Dias**[5]
**Miguel Chaquiam**[6]

**Resumo**
Neste trabalho é apresentado as análises referente a base e dimensão de um espaço vetorial nos livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha, a luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS). Como metodologia de pesquisa, foi adotada a bibliográfica-documental, na qual se buscou estudos como Mendes (2012) e Chaquiam (2012) referente a importância de trabalhos biográficos, bem como sobre a vida e obras de Guilherme de La Penha, e ainda em estudos sobre a TRRS. Para auxiliar nas análises, utilizamos a Análise do Conteúdo de Bardin (2010), que nos possibilitou criar três categorias de análise: (i) Introdução do conteúdo, (ii) Definição do objeto matemático e (iii) Uso de mais de uma representação do objeto matemático. A análise dos livros nos possibilitou observar que La Penha utilizou mais de uma representação do objeto matemático no intuito de uma melhor compreensão sobre este, de maneira mais expressiva em uns livros do que outros, justificado pelo público alvo de cada livro. Por fim, a partir dos recortes efetuados sobre as obras deste cientista, nos permitiu evidenciar a visão de La Penha acerca da Álgebra Linear, fato que ressalta a importância e a complementação de estudos dessa natureza.

**Palavras-chave:** História da Matemática; Biografias; Guilherme de La Penha; Álgebra Linear; Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

## 1. Considerações Iniciais

É possível perceber que desde a metade do século XX as pesquisas em história da matemática e da educação matemática têm se atentando a história de matemáticos e de professores de matemática como forma de compreender as contribuições destes à Matemática, bem como de conhecer as diversas formas de apresentação do saber.

Segundo Mendes (2012), as (auto) biografias de matemáticos e de professores de matemática, ao serem incorporadas às pesquisas em educação

[5] Universidade do Estado do Pará – renanmarcelo1998@gmail.com
[6] Universidade do Estado do Pará – miguelchaquiam@gmail.com

matemática, possibilitam contribuições à formação de professores de matemática e ao ensino de matemática, bem como à constituição de acervos documentais, das memórias e do patrimônio da educação matemática brasileira. Também nos diz que construção de itinerários intelectuais, materiais didáticos, artigos, teses e livros são fragmentos deixados que contribuem para composição de histórias, o que nos remete à importância de pesquisas desta natureza. Esses aspectos faz dessa abordagem uma diretriz norteadora das pesquisas na formação de professores e no ensino de matemática, devido seu carácter refletivo das dimensões epistemológicas, sociais e educativas (MENDES, 2012).

O paraense Guilherme de La Penha foi um cientista cujas contribuições à ciência, em especial à matemática, não passam despercebidas. Iniciou a graduação em engenharia mecânica pela Universidade Federal do Pará (UFPA) e a concluiu na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), tornou-se mestre pela PUC-Rio, obteve o doutoramento pela University of Houston (EUA) e pós-doutorado na University Carnegie-Mellon (EUA).

Guilherme de La Penha transitou nas diversas áreas, dentro e fora da matemática. Na matemática foi autor de diversos livros, dentre os quais, há um compêndio de álgebra linear da década de 70, sendo o último livro desse conjunto adotado em universidades da América latina. Segunda ele, o intuito era dar investir numa abordagem conceitual moderna, com destaque para formas algébricas e geométricas, além dos métodos numéricos, ou seja, de pelos menos três representações.

Desse modo, buscamos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymund Duval, que estuda a influência das representações na aprendizagem em Matemática, um norteador nas análises dos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha. Considerando que se trata de um recorte de pesquisa em andamento, delimitamos aos tópicos de base e dimensão de um espaço vetorial.

Sendo assim, decidiu-se analisar a abordagem metodológica de base e dimensão de um espaço vetorial nos livros de Álgebra Linear do cientista paraense Guilherme de La Penha, a luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

## 2. Traços Biográficos de Guilherme de La Penha

O relato foi construído a partir de Chaquiam (2012), tese cujo foco central foi à historiografia brasileira da ciência, voltado especificamente para a vida e obra deste matemático-físico da contemporaneidade, nascido no dia 09 de março de 1942, em Belém do Pará. No quadro a seguir consta a carreira acadêmica de Guilherme de La Penha, com algumas de suas atividades.

**Quadro 1:** Atividades acadêmicas de Guilherme de La Penha

| PERÍODO | ATIVIDADE | LOCAL |
|---|---|---|
| 1953 – 1956 | Curso Primário | Instituto Suíço Brasileiro |
| 1949 – 1952 | 1º ciclo Secundário e Ginasial | Colégio Marista Nossa Senha de Nazaré |
| 1956 – 1959 | Curso de agrimensura | Escola Técnica de Agrimensura do Pará |
| 1960 – 1964 | Curso de Engenharia Mecânica | UFPA/PUC – Rio |
| 1961 – 1963 | Curso de Aperfeiçoamento em Matemática | IMPA |
| 1964 – 1965 | Mestrado em Engenharia Mecânica | EPUC/PUC – Rio |
| 1965 – 1966 | Curso de Matemática aplicada e mecânica dos sólidos | Departamento de Matemática Aplicada e Física Teórica da universidade de Cambridge (INGLATERRA) |
| 1966 – 1968 | Doutorado em Matemática aplicada e mecânica dos sólidos | University of Houston (EUA) |
| 1967 | Curso de Mecânica do Contínuo | Brows University e Virgínia Polytechnic Institute |
| 1969 | Curso de Mecânica do Contínuo | Johns Hopkins University |
| 1968 – 1969 | Pós Doutoramento em Matemática Aplicada | University Carnegie-Mellon |

Fonte: Chaquiam (2012)

La Penha foi autor e coautor e autor de diversos livros de matemática, inclusive de Álgebra Linear. Em 1974, com Mina Seinfeld de Carakushansky, professora e pesquisadora assistente do Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM-UFRJ), iniciou com os livros Álgebra Linear I e II, uma sequência de livros de Álgebra Linear.

Em 1975 lançou Sinopse de Álgebra Linear, que segundo ele era literalmente notas das exposições de Álgebra Linear realizadas no mestrado na Coordenação dos Programas e Pesquisas em Engenharia (COPPE) e no IM-UFRJ, de 1970 a 1973. Em 1976 lançou Introdução à Álgebra Linear, republicado pela McGraw-Hill em 1977, adotado em diversas universidades brasileiras e da América Latina, como Introducción al álgebra linear. Segundo Dias & Chaquiam (2018), La Penha apresenta os conceitos por meio de numa abordagem moderna e ressalta as influências algébricas e geométricas desses estudos em relação aos métodos numéricos.

Ao final foi possível concluir que La Penha tinha a preocupação de representar um mesmo objeto matemático de formas diferenciadas, assim como, fazer aproximações dos conteúdos de álgebra linear aos conteúdos matemáticos da educação básica e aos demais conteúdos comumente abordados nos cursos de álgebra linear.

## 3. Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A Matemática enquanto saber científico difere-se devido ao fato do acesso aos seus objetos de estudo dar-se apenas por meio das suas representações, ou seja, a partir dessas representações é que podemos conhecer e se apropriar de seus conceitos e características, embora não tenhamos em mãos o próprio objeto. Desse modo, as representações têm um importante papel nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática. Neste sentido, nos apoiamos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) desenvolvida por Raymond Duval entre os anos de 1970 e 1995.

Duval (1993, p. 39 apud GRANDE, 2006, p. 63) define representações semióticas como sendo 'Produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento', ou seja, são maneiras próprias de representar os objetos matemáticos, um problema ou uma técnica.

Ainda segundo Duval (2009 apud CARDOSO, 2014), o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio de suas representações e não há conhecimento matemático que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação. Em álgebra linear, por exemplo, podemos representar uma base de um espaço vetorial em sua representação algébrica, geométrica ou até mesmo numérica, porém, em nenhuma dessas representações estão sendo tratadas verdadeiramente as bases de um espaço vetorial, e sim as representações desse objeto. As representações, portanto, não significam o objeto matemático em si, mas nos fornece informações valiosas a respeito deste, e nesse ínterim repousa cognitivamente a importância das representações na aprendizagem em matemática (GRANDE, 2006).

De acordo com Duval (2011 apud MENDONÇA, 2017), o conhecimento começa quando não adotamos mais a representação do objeto no lugar do próprio objeto, e uma das formas para não confundir o objeto matemático de sua representação é dispor de uma segunda representação cujo conteúdo seja diferente da primeira. Nesse contexto, tem-se a necessidade da transição do aluno de um registro semiótico a outro ou até mesmo no mesmo registro, e para que essa transição ocorra é necessário ter claros dois conceitos de transformações: Tratamento e Conversão.

Duval define tratamento como sendo transformações de representações dentro do mesmo registro semiótico e estas constituem transformações estritamente internas ao registro, sendo muitos destes específicos de cada registro. A conversão é definida por Duval como a transformação de representação de um registro semiótica a outro registro, no qual altera-se a forma de apresentar o conteúdo, conservando-se a referência ao mesmo objeto (GRANDE, 2006).

O exemplo a seguir esclarece as mudanças de representação onde são mantidos o mesmo tipo de registro (tratamento) e representação com mudança de um registro semiótico para outro (conversão). Para tanto, consideremos os vetores $\overrightarrow{u_1} = (1\ ,\ 2)$ , $\overrightarrow{u_2} = (3\ ,1)$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = (9\ ,8)$. Uma primeira situação envolve a representação algébrica quanto a representação do vetor $\overrightarrow{u_2}$ em função dos vetores $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$.

Relembremos que vetores $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$ linearmente independentes podem ser representados geometricamente e, além, disso, constituem uma base para o espaço vetorial $\Re^2$, com as operações usuais. Assim, podemos representar o vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{\mathrm{u}_2}$, cuja representação algébrica é dada por $\alpha.\overrightarrow{\mathrm{u}_1} + \beta.\overrightarrow{\mathrm{u}_2} = \vec{\boldsymbol{v}}$, e sua representação geométrica evidenciada na figura a seguir.

Por outro lado, para determinarmos os valores $\alpha$ e $\beta$, substituímos os valores referentes aos vetores $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$, para recairmos num sistema linear, isto é, os valores dos vetores em $\alpha.\overrightarrow{u_1} + \beta.\overrightarrow{u_2} = \vec{\boldsymbol{v}}$ resultam $\alpha.(1\,,\ 2) + \beta.(3\,,1) = (9\,,8)$ e, posteriormente, o sistema linear $\begin{cases} \alpha & + & 3.\beta & = & 9 \\ 2.\alpha & + & \beta & = & 8 \end{cases}$, cuja solução é única e resulta $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

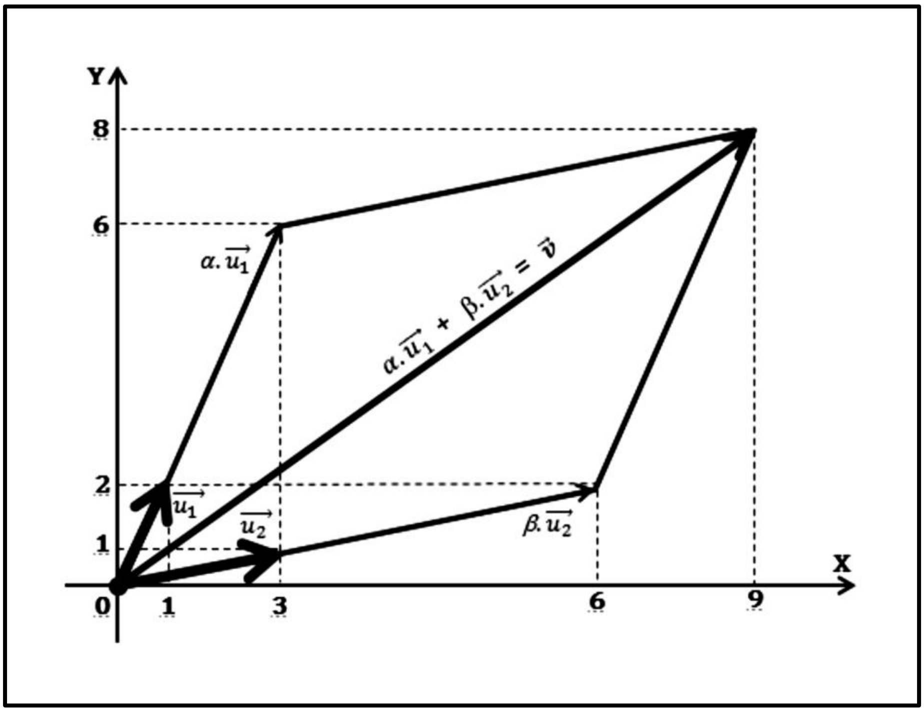



**Figura 1** - Representação geométrica de vetores.

Na figura acima é possível observar geometricamente as representações algébricas envolvendo as seguintes situações:

a) $\overrightarrow{u_1}$ e $\alpha.\overrightarrow{u_1}$.
b) $\overrightarrow{u_2}$ e $\beta.\overrightarrow{u_2}$.
c) $\alpha.\overrightarrow{u_1} + \beta.\overrightarrow{u_2} = \vec{\boldsymbol{v}}$ e $\alpha.(1\,,\ 2) + \beta.(3\,,1) = (9\,,8)$ e $\alpha.(1\,,\ 2) + \beta.(3\,,1) = (9\,,8)$.

Uma análise global deste do exemplo apresentado nos permite concluir em relação às mudanças de representação onde é mantida o mesmo tipo registro (tratamento), observado cada uma das colunas separadamente e, representação com mudança de um registro semiótico para outro (conversão), quando se compara o descrito entre linhas de cada coluna, respectivamente:

i. Tratamento (algébrico/numérico)    ii. Conversão (geométrica)

| | |
|---|---|
| $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_1}$ | Vetores linearmente independente |
| $\alpha.\overrightarrow{u_1}$ e $\beta.\overrightarrow{u_2}$ | Multiplicação por um escalar |
| $\alpha.\overrightarrow{u_1} + \beta.\overrightarrow{u_2} = \vec{\boldsymbol{v}}$ | Combinação linear de vetores |
| $\alpha.(1\ ,\ 2) + \beta.(3\ ,1) = (9\ ,8)$ | Regra do paralelogramo |
| $3.(1\ ,\ 2) + 2.(3\ ,1) = (9\ ,8)$ | Decomposição vetorial |
| $\begin{cases} \alpha + 3.\beta = 9 \\ 2.\alpha + \beta = 8 \end{cases}$ | Sistema linear |

Portanto, a partir do exemplo apresentado é possível identificar diversas mudanças quanto tratamento e conversão de representações envolvendo vetores, base, sistema linear e independência linear.

Mendonça (2017) destaca que Duval enfatiza que matematicamente mais importante que as representações semióticas são as transformações que podem ser realizadas, sendo a conversão responsável por um papel fundamental na aprendizagem do ponto de vista cognitivo, visto que é subjacente a compreensão do objeto matemático, e possibilita a revelação das dificuldades do indivíduo ao lidar com este.

Além disso, a importância da conversão repousa no fato de que não existem regras para a realização da conversão, o que necessita de uma articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros, desse modo, passar de um registro de representação a outro não é somente reescrever de uma para outra forma o mesmo objeto, mas sim de perceber as propriedades e características daquele objeto.

## 4. Aspectos Metodológicos

A metodologia de pesquisa adotada foi do tipo bibliográfica-documental, que segundo Gil (2008) é a pesquisa que se utiliza de material já elaborado constituído principalmente de livros e artigos científicos, pois permite ao investigador uma visão ampla dos estudos já realizados sobre o tema. Dessa forma buscamos em estudos a importância da pesquisa de personagens históricos e do itinerário de Guilherme de La Penha, e ainda fundamentação na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a fim de usá-la como auxílio para as análises.

Além disso, para Gil (2008), nessa metodologia também são utilizados documentos que ainda não tiveram um tratamento analítico ou que podem ser reelaborados de acordo com o objetivo da pesquisa, que em nosso caso são os livros Álgebra Linear I e II (1974), Sinopse de Álgebra Linear (1975) e Introdução a Álgebra Linear (1977), de autoria de Guilherme de La Penha em colaboração de outros professores, sob a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Para um melhor andamento da pesquisa, em termos metodológicos, utilizamos a Análise de conteúdo como norteadora das atividades desse estudo.

A Análise do conteúdo, enquanto metodologia, é definida como sendo 'um conjunto de técnicas de análises das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens' (BARDIN, 2010, p. 44). Em outras palavras, a análise do conteúdo nos possibilita inferir informações ocultas no texto, seja ele escrito, oral, em sinais, através de imagens ou sons, a partir de objetivos anteriormente definidos e mediante a decodificação da mensagem.

Embora esse método seja comumente usado nas ciências sociais, o seu caráter marcado por uma disparidade de formas e adaptável a um campo de aplicação muito vasto (as comunicações), abre portas para outras áreas, dentre estas, a Matemática; fato que nos motivou a utilizá-la para analisar os livros em questão. Segundo Bardin (2010), essas inferências são alcançadas a partir de um roteiro pré-estabelecido que são organizados em torno de três polos cronológicos: Pré-análise, Exploração do Material e Tratamento dos resultados obtidos na interpretação.

A Pré-análise tem por objetivo a organização, embora ela própria seja composta por atividades não estruturadas, na qual há a escolha dos documentos a serem analisados, por meio de regras de exaustividade, representatividade, homogeneidade e pertinência; a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final, não exatamente nessa ordem (BARDIN, 2010).

A exploração do material consiste basicamente na aplicação sistemática das decisões tomadas na Pré-análise, onde o analista realiza operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função de regras previamente formuladas. Segue-se para o tratamento dos resultados obtidos na interpretação, pois tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis, pode propor inferências e adiantar intepretações a propósito dos objetivos previstos ou outras descobertas (BARDIN, 2010).

Assim, como organizar os dados brutos a fim de uma melhor análise? Para Bardin (2010), a categorização desses dados é perfeita para esse objetivo, pois fornece de forma condensada uma representação simplificada destes, uma vez que evita desvios do material e dá conhecimento dos índices invisíveis ao nível dos dados brutos. Para tal fim, é necessário criar categorias, com as seguintes qualidades: exclusão mútua, homogeneidade, pertinência, objetividade, finalidade e produtividade (BARDIN, 2010).

Diante dos pressupostos elencados e considerando o que se refere a exploração do material, para uma melhor organização dos dados e fluidez do trabalho, tomadas as observações de Dias & Chaquiam (2018) sobre os mesmos livros e a TRRS, criamos três categorias de análise a fim de obter inferências relevantes à nossa pesquisa, sejam elas: (i) Introdução do conteúdo; (ii) Definição do objeto Matemático e (iii) Utilização de mais de uma representação do objeto Matemático.

Na primeira categoria verificou-se de que forma são introduzidos os conteúdos de base e dimensão; a segunda categoria foi responsável pela observação do modo de definição dos objetos matemáticos e, na terceira, identificou-se de que forma são trabalhadas as representações de um mesmo objeto.

Visando uma melhor organização do trabalho, renomeamos os livros da seguinte maneira: Álgebra Linear I e II – AL1, Sinopse de Álgebra Linear – AL2 e Introdução à Álgebra Linear – AL3. Entretanto, devido a semelhança textual entre os livros AL1 e AL3 de modo que o livro AL3 incorpora o livro AL1, somado ao limite de páginas deste evento, apresentamos somente as análises dos livros AL2 e AL3.

## 5. Descrição e Análise dos Dados

Apresentamos os recortes dos conteúdos relacionados a Base e Dimensão constantes nos livros de Guilherme de La Penha com o intuito de apresentar uma análise a respeito desses conteúdos segundo as categorias (i), (ii) e (iii).

- SINOPSE DE ÁLGEBRA LINEAR (AL2)

O livro AL2 é datado de 1975 e tem como autores Luiz Medeiros, Guilherme de La Penha e Gustavo Menzala. A seguir apresentamos as análises e discussões segundo as categorias já indicadas.

(i) *Introdução do conteúdo*

No livro AL2, La Penha não faz uma introdução ao conteúdo de base de um espaço vetorial, bem como também não a faz ao tópico de dimensão. Entendemos que isso ocorre devido ao fato de esse livro ser apenas um resumo das principais definições da álgebra linear, pois há uma espécie de introdução dedutiva nos livros AL1 a AL3.

*(ii) Definição do objeto matemático*

La Penha define base de espaço vetorial assim: ‘Seja G = {$u_i$ | i ϵ r} um sistema finito de geradores de V(K) e seja ($u_j$), j ϵ n uma sequência em G cujos vetores são linearmente independentes. Então existe uma base de V(K) que contém vetores $u_j$ (j = 1, ..., n) e está contida em G (MEDEIROS, LA PENHA & MENZALA, 1975, p. 24).

Sobre a definição de dimensão de um espaço vetorial, ela é assim definida: ‘Definimos a dimensão de um espaço vetorial não trivial gerado finitamente como sendo o número de vetores de qualquer base desse espaço e dizemos que um tal espaço é de dimensão finita (MEDEIROS, LA PENHA & MENZALA, 1975, p. 27).

É possível perceber que as definições de base e dimensão de um espaço vetorial no livro AL2 são apresentadas de maneira objetiva e clara. É importante ressaltar que a definição de base no livro AL2 é apresentada de forma contrária ao comumente apresentado nos outros livros, visto que se parte de geradores e vetores linearmente independente para afirmar que existe uma base.

*(iii) Uso de mais de uma representação do objeto matemático*

No livro AL2 não identificamos o uso de mais de uma representação de base e dimensão. Acreditamos que isso ocorre em razão do mesmo motivo de não haver introduções à esses tópicos, pois nos livros AL1 e AL2 essas representações algébricas e geométricas são marcantes.

A partir das análises do livro AL2, percebemos que os tópicos de base e dimensão de um espaço vetorial não são precedidos de uma introdução ou algo parecido, pois as definições são apresentadas de maneira sintética e objetiva. É interessante ressaltar que a definição de base de um espaço vetorial é apresentada de maneira contrária aos livros AL1 e AL3, entretanto não sabemos se por conveniência do autor ou se por um objetivo específico deste.

Além disso, não foi identificado o uso de outras representações dos objetos matemáticos em questão, visto que é um resumo das principais definições da álgebra linear, o que justifica a ausência de certas representações. Em suma, percebe-se que o livro AL2 é um livro compacto, com poucos exemplos e numa linguagem axiomática.

- INTRODUÇÃO A ÁLGEBRA LINEAR (AL3)

O livro AL3, publicado em 1977, é de autoria de Guilherme de La Penha em parceria com Mina Seinfeld de Carakushansky, e foi editado pela UFRJ. A seguir apresentamos as análises e discussões segundo as categorias elencadas inicialmente.

*(vii) Introdução do conteúdo*

No livro AL3, La Penha introduz o tópico base a partir da seguinte situação:

> Consideremos em $R^n$, o conjunto de vetores $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ onde Ei é o vetor que tem zeros em todas as componentes exceto na i-ésima, que é 1.
>
> $$E_i = [0, ..., 0, 1, 0, ..., 0]$$
>
> Observamos primeiro que estes vetores são linearmente independentes. Pois supondo que $\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + ... + \alpha_n E_n = 0$
> Temos que $\alpha_1 [1, 0, ..., 0] + \alpha_2 [0, 1, ..., 0] + ... + \alpha_n [0, 0, ..., 1] = 0$
> Ou, $[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n] = [0, 0, ..., 0]$
> Assim, $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.
> Os vetores $E_1, E_2, ..., E_n$ também geram $R^n$, pois se $V \in R^n$, $V = [x_1, x_2, ..., x_n] = x_1 [1, 0, ..., 0] + x_2 [0, 1, ..., 0] + ... + x_n [0, 0, ..., 1] = x_1E_1 + x_2E_2 + ... + x_nE_n$
> Como qualquer vetor V pode ser escrito como combinação linear de $E_1, E_2, ..., E_n$ vemos que $E_1, E_2, ...,$ En geram $R^n$. Conjuntos deste tipo, que são linearmente independentes e que geram o espaço ao qual pertencem são muito importantes na Álgebra Linear (CARAKUSHANSKY & LA PENHA, 1977, p. 169).

É possível perceber que La Penha utiliza uma situação contextualizada matematicamente, na qual informa implicitamente as condições necessárias para que um conjunto de vetores possa ser base de um determinado espaço vetorial. Entretanto, não há uma introdução à dimensão de um espaço vetorial, pois nesse livro o tópico dimensão está inserido no tópico de base.

*(viii) Definição do objeto matemático*

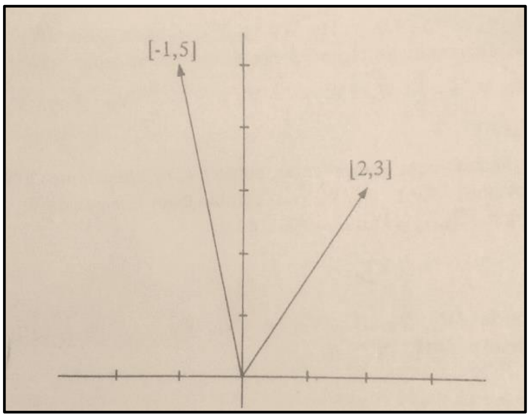
O autor assim define base de um espaço vetorial: ‘Um conjunto de vetores B = {$V_1$, $V_2$, ...., Vn} é dito uma base para v se B é linearmente independente e B gera v’ (CARAKUSHANSKY & LA PENHA, 1977, p. 169).

Em relação a dimensão de uma base de um espaço vetorial é apresentado a seguinte definição: ‘Seja v ≠ {0} um espaço vetorial. Então a dimensão de v é o número de vetores de uma base de v. No caso em que v = {0} diz-se que v tem dimensão zero. Quando o número de vetores de uma base de v é finito diz-se que v é um espaço vetorial de dimensão finita’ (CARAKUSHANSKY & LA PENHA, 1977, p. 172).

Percebemos que no livro AL3, as definições de base e dimensão são apresentadas de maneira direta e objetiva. Em relação à base de um espaço vetorial, é fácil ver que o entendimento da introdução da base de um espaço vetorial facilita ainda mais a compreensão da definição deste objeto.

*(ix) Utilização de mais de uma representação do objeto matemático*

No primeiro exemplo, após a definição de base, La Penha trata de um conjunto de vetores que são base e mostra a razão de ser uma base:

> O conjunto {(2,3), (-1,5)} é uma base para $R^2$. Geometricamente, este conjunto é linearmente independente, já que os vetores não são colineares e, gera $R^2$, pois qualquer vetor do plano pode ser escrito como combinação linear desses vetores.
>
> 
> 
>
> Algebricamente, este conjunto é linearmente independente, já que $\alpha_1[2,3] + \alpha_2[-1,5] = [0,0] \rightarrow \begin{cases} 2\alpha 1 - \alpha 2 = 0 \\ 2\alpha 1 + 5\alpha 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e gera $R^2$, pois um vetor arbitrário V = [x, y] pode ser escrito como uma combinação linear de [2,3] e [-1,5]:
>
> $[x,y] = k_1 [2,3] + k_2 [-1,5] = [2k_1 - k_2, 3k_1 + 5k_2] \rightarrow \begin{cases} 2k1 - k2 = x \\ 3k1 + 5k2 = y \end{cases}$

$k_1 = \frac{x+k2}{2} \rightarrow k_1 = \frac{5x+y}{13}$
$3k_1 + 5k_2 = y \rightarrow \frac{3x + 3k2}{2} + 5k_2 = y \rightarrow k_2 = \frac{2y-3x}{13}$
Logo,
$[x,y] = \frac{5x+y}{13}$ [2,3] + $\frac{2y-3x}{13}$ [-1,5] (CARAKUSHANSKY & LA PENHA, 1977, p. 170).

É possível perceber que La Penha utiliza as representações algébricas e geométricas da base de um espaço vetorial, e embora não seja realizada a conversão entre essas representações, ele busca ressaltar em cada uma delas as condições de independência linear e geradores, ou seja, as propriedades em cada registro de representação. Esse fato, dentro da TRRS, é essencial para que haja a conversão de registros de representação e em seguida a compreensão.

No que diz respeito ao usa das representações no tópico de dimensão de um espaço vetorial, La Penha realiza um tratamento dentro do registro algébrico:

Consideremos o sistema de equações homogêneas

$$\begin{cases} x1 + 2x2 - x3 + x4 = 0 \\ x1 - x2 + 3x3 + 2x4 = 0 \end{cases}$$

Escrevendo esse sistema em notação matricial, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O conjunto das soluções {[x1, x2, x3, x4]} desse sistema forma um subespaço de $R^4$. Vamos achar uma base para este subespaço e calcular a dimensão. Utilizaremos o método de eliminação (...) (CARAKUSHANSKY & LA PENHA, 1977, p. 173).

No que diz respeito ao livro AL3, observamos que há uma introdução ao estudo da base se um espaço vetorial, e esta, contribui significativamente à compreensão da definição, entretanto, não há uma introdução na dimensão de espaço vetorial, uma vez que ele está dentro do tópico base. A definição de base e dimensão é apresentada de maneira sucinta e visível.

Sobre o uso de mais de uma representação do objeto matemático, percebemos que, em relação à base de um espaço vetorial, embora não houvesse a conversão que Duval ressalta dentro da TRRS, os autores buscam estudar o objeto em toda sua totalidade, seja de forma algébrica ou geométrica, o que possibilita uma boa conversão e assim uma compreensão do objeto matemático em sua totalidade. Em síntese, percebe-se que o livro AL3 é um livro mais completo em relação ao livro AL2, com muitos exemplos e destinado aos iniciantes em álgebra linear, confirmo o título do livro.

## 6. Considerações Finais

Este trabalho tinha por objetivo analisar os tópicos base e dimensão nos livros de Álgebra Linear de Guilherme de La Penha com apoio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), isto é, verificar o afirmado por La Penha quanto as representações na abordagem metodológica em seus livros sobre o ponto de vista algébrico e geométrico, bem como da importância associada as questões numéricas.

Diante das análises realizadas, em relação a primeira categoria, percebemos que no livro AL2 não é feita uma introdução aos tópicos supracitados, pois trata-se de um material contendo as principais definições de Álgebra Linear voltado a um público com uma familiaridade nesse conteúdo. No livro AL3, é apresentado uma situação, na qual o autor informa de maneira indireta as condições para que um conjunto de vetores seja uma base de um espaço vetorial, e não realiza introdução á dimensão porque ela está contida no tópico de base de um espaço vetorial.

No que se refere a segunda categoria, nos livros AL2 e AL3 as definições de base e dimensão de um espaço vetorial são apresentadas de maneira clara e objetiva, sendo interessante ressaltar que a definição de base no livro AL2 é feita no sentido inverso da realizada nos outros livros de La Penha, entretanto ainda não identificamos se é feito dessa maneira por conveniência ou com um propósito metodológico.

Sobre o uso de outras representações, no livro AL2 encontramos apenas as representações algébricas, novamente justificadas pelo objetivo desse livro e do seu público alvo. No que se refere ao livro AL3, percebemos que La Penha apresenta pelo menos três tipos de representação, sejam elas: algébrica, geométrica e numérica; e embora não realize nenhum tipo de tratamento ou conversão, ele explora ao máximo os conceitos em cada representação, e isso dentro da TRRS é de grande importância, uma vez que possibilita um sucesso na conversão e posteriormente na compreensão.

De um modo geral, a partir das análises dos livros realizadas, nos foi possível conhecer um pouco da visão de Guilherme de La Penha sobre Álgebra Linear e ainda de verificar como ele concebia o uso das representações no processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear.

Nesse sentido, podemos concluir, a partir das análises realizadas, que Guilherme de La Penha acreditava que o uso de mais de uma representação do objeto matemático possibilitaria em um melhor aprendizado sobre esse objeto matemático, e por isso buscou ressaltar em seus livros as influências algébricas e geométricas, de maneira mais expressiva em uns do que outros, diante do público alvo de cada livro.

Assim, a partir da análise de parte da obra desse cientista paraense, nos foi possível conhecer um pouco mais Guilherme de La Penha, fato que corrobora com os estudos que dissertam sobre a importância de trabalhos biográficos que tomam esses recortes como princípios de validação de pesquisas dentro da educação matemática. Portanto, diante do exposto, evidencia-se a importância de trabalhos dessa natureza, à formação de professores, ao ensino de matemática e à constituição de acervos documentais, das memórias e do patrimônio da educação matemática brasileira.

## 7. Referências

BARDIN, L. **Análise do Conteúdo**. Tradução: Luíz Antero Reto. São Paulo: Edições 70, 2016.

CARDOSO, Valdinei Cezar. **Ensino e aprendizagem de álgebra linear: Uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais.** Tese de Doutorado em Ciências e Ensino de Matemática. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Campinas, 2014.

CHAQUIAM, Miguel. **Guilherme de La Penha:** Uma história do seu itinerário intelectual em três dimensões. Tese de Doutorado em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Natal, 2012.

DIAS, R. M. D. & CHAQUIAM, M. **Os livros de Álgebra Linear do Cientista Paraense Guilherme de La Penha.** I Congresso Pan-Amazônico de Matemática. Anais do I COPAM, 2018.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Editora Atlas, 2008.

GRANDE, A. L. **O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de álgebra linear**. Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica – SP. São Paulo, 2006.

LA PENHA, G. **Introdução à Álgebra Linear.** São Paulo: McGraw-Hill, 1977.

MEDEIROS, L. A. da J; LA PENHA, G. M. S. & MENZALA, G. P. **Sinopse de Álgebra Linear.** 1ª Edição. Rio de Janeiro: UFRJ, 1975.

MENDES, Iran Abreu. **Pesquisas em História da Educação Matemática no Brasil em três dimensões**. In: Revista Quipu. vol. 14, n. 1. Enero-abril de 2012, p. 69-92.

MENDONÇA, N. S. **Registros de Representação Semiótica, Calculadora e o Geogebra:** Enlaces possíveis na aprendizagem de função exponencial. Mestrado em Educação Matemática. Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, 2017.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

Centro de Ciências Sociais e Educação
Curso de Licenciatura em Matemática
Av. Djalma Dutra S/n
66030-010 Belém - PA